**線形代数学 II-1 (上岡)　レポート課題 (3)　答え**

**問 1**. (I) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して ${}^t xy = {}^t yx$ だから $\langle x, y\rangle = {}^t x {}^t AAy = {}^t(Ax)(Ay) = {}^t(Ay)(Ax) = {}^t y {}^t AAx = \langle y, x\rangle$. (II) 行列積の分配則より $\langle x, y+z\rangle = {}^t x {}^t AA(y+z) = {}^t x {}^t AAy + {}^t x {}^t AAz = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$. 同様にスカラー倍の結合則より $\langle x, \alpha y\rangle = {}^t x {}^t AA(\alpha y) = \alpha {}^t x {}^t AAy = \alpha\langle x, y\rangle$. (III) $x = 0$ のとき $\langle 0, 0\rangle = 0$ となるのは定義より明らか. $x \neq 0$ のとき $A$ は正則だから $Ax \neq 0$. さらに任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して ${}^t xx > 0$ が成り立つから $\langle x, x\rangle = {}^t x {}^t AAx = {}^t(Ax)(Ax) > 0$.

**問 2**. $\sum_{j=1}^r \alpha_j v_j = 0$ の両辺と $v_k$ $(1 \leq k \leq r)$ の内積をとる. このとき左辺からは $\sum_{j=1}^r \alpha_j \langle v_j, v_k\rangle$ が得られるが, $v_1, \ldots, v_r$ は直交系をなすから, これは $\alpha_k\langle v_k, v_k\rangle$ に等しい. 一方, 右辺から得られるのは $\langle 0, v_k\rangle = 0$ である. 従って任意の $1 \leq k \leq r$ に対して $\alpha_k\langle v_k, v_k\rangle = 0$ である. さらに $v_k \neq 0$ より $\langle v_k, v_k\rangle \neq 0$ だから $\alpha_k = 0$ である.

**問 3**. グラム・シュミットの正規直交化法による計算の流れは次の通り:

$$
\begin{aligned}
v_1' &= u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
v_1 &= \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \\
v_2' &= u_2 - (u_2 \cdot v_1)v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
v_2 &= \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\
v_3' &= u_3 - (u_3 \cdot v_1)v_1 - (u_3 \cdot v_2)v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
v_3 &= \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

得られたユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底は

$$
v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

**問 4**. $W^\perp$ がベクトルの和とスカラー倍に関して閉じていることを示せばよい. $x, y \in W^\perp$ のとき, 任意の $w \in W$ に対して $\langle w, x+y\rangle = \langle w, x\rangle + \langle w, y\rangle = 0 + 0 = 0$. 従って $x + y \in W^\perp$ である. 同様に $x \in W^\perp$ かつ $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき, 任意の $w \in W$ に対して $\langle w, \alpha x\rangle = \alpha\langle w, x\rangle = \alpha 0 = 0$. 従って $\alpha x \in W^\perp$ である.

**問 5**. (1) $A$ を直交行列とする. このとき ${}^t AA = E$ である. 両辺の行列式をとると左辺からは $\det({}^t AA) = \det({}^t A)\det(A) = (\det(A))^2$, 右辺からは $\det(E) = 1$ が得られる. 従って $(\det(A))^2 = 1$ すなわち $\det(A) = \pm 1$ である. (2) 略.