応用代数学 第 2 回レポート問題略解

講義ページ: http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/lab/tujimoto/appalg/

問題 1

(1) $H := \langle a \rangle$ とすると，H は G の部分群であり，Lagrange の定理により $|H|$ は $|G|$ を割り切る．$|\langle a \rangle|$ は a の位数と等しいことから，a の位数は $|G|$ の約数である．

（a の位数を n とすると $e, a^1, \cdots, a^{n-1}$ は互いに相異なる．さもなければ，a の位数が n であることに矛盾する.）

(2) 単位元ではない $a \in G$ をとれる．このとき $|G|$ が素数であることから，a の位数は $|G|$ となり，a の冪により全ての G の元が生成されることを示している．よって，G は巡回群である．

(3) （有限群と仮定すると,）Lagrange の定理により $|G/\operatorname{Ker} f||\operatorname{Ker} f| = |G|$ がまず成り立つ．また同型性から $|G/\operatorname{Ker} f| = |\operatorname{Im} f|$ である．以上より，$|\operatorname{Im} f| = |G|/|\operatorname{Ker} f|$ となる．

問題 2

(1) 任意の $a, b \in H \cap K$ をとったとき，$ab^{-1} \in H \cap K$ を示せばよいが，$a, b \in H$ から $ab^{-1} \in H$ であり，$a, b \in K$ から $ab^{-1} \in K$ でもあるので，$ab^{-1} \in H \cap K$ である．

(2) (a) $HK = \bigcup_{h \in H} hK$ であることに注意すると, 相異なる hK の個数を求め, $|K|$ を乗じればよい．$h_1, h_2 \in H$ に対して $h_1K = h_2K$ とすると，$h_1h_2^{-1}K = K$ から $h_1h_2^{-1} = K$ を得る．つまり，$h_1h_2^{-1} \in K \cap H$ であり，$h_1(K \cap H) = h_2(K \cap H)$ が成り立つ．逆に，$h_1(K \cap H) = h_2(K \cap H)$ ならば $h_1K = h_2K$ も成り立つ．$(K \cap H) \leq H$ であることを考えると，相異なる $h(K \cap H)$ $(h \in H)$ の個数は，H における $K \cap H$ の指数であり，Lagrange の定理により $[H : (K \cap H)] = |H|/|K \cap H|$ で与えられる．したがって,

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|K \cap H|}$$

である．

(b) $HK = KH$ が成立するとする．このとき，任意の $n_1, n_2 \in HK$ について，$n_1n_2^{-1} \in HK$ を示せばよい．まず，ある $h_1, h_2 \in H$ とある $k_1, k_2 \in K$ を用いて，$n_1 = h_1k_1, n_2 = h_2k_2$ とかける．すると，$n_1n_2^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$ とかけるが，$k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH$ から，ある $h_3 \in H, k_3 \in K$ を用いて，$h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_3k_3$ と書き直せる．よって，$n_1n_2^{-1} \in HK$ であり，$HK \leq G$ である．

逆に HK が G の部分群であると仮定する．このとき，$H \leq HK, K \leq HK$ から，$KH \subseteq HK$ が成り立つ．また，任意の HK の元はある $h \in H, k \in K$ を用いて hk とかけ，その逆元 $(hk)^{-1}$ もある $h' \in H, k' \in K$ を用いて，$(hk)^{-1} = h'k'$ とかける．つまり，$hk = (h'k')^{-1} = k'^{-1}h'^{-1}$ と変形でき $hk \in KH$ が成立．したがって $HK \subseteq KH$ となり，$HK = KH$ である．

(3) (a) $\Rightarrow$ (b)

N を G の正規部分群とする．このとき写像 $f : G \to G/N$ を $g \mapsto f(g) = gN$ で定義すると，f は準同型写像となる．実際，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して $f(g_1g_2) = g_1g_2N = g_1Ng_2N = f(g_1)f(g_2)$ が成立する．すると，$\operatorname{Ker} f = \{g \in G \mid f(g) = N\} = \{g \in G \mid gN = N\} = N$ となり，N は f の核となっている．

(b) $\Rightarrow$ (a)

$N = \operatorname{Ker} f$ を仮定すると N は G の部分群となる．このとき，任意の $n \in N$, $g \in G$ に対して，$f(gng^{-1}) = f(g)f(n)f(g^{-1}) = e_H$ より，$gng^{-1} \in N$ となる．よって，N は G の正規部分群である．

(4) まず，$N \cap H$ は H の部分群である．$k \in N \cap H$ とする．このとき任意の $h \in H$ に対して，$hkh^{-1} \in H$ $(\because H \leq G,\ k \in H)$，$hkh^{-1} \in N$（$\because N \trianglelefteq G,\ h \in G,\ k \in N$）が成立し，$hkh^{-1} \in H \cap N$．よって，$N \cap H \trianglelefteq H$ となる．

(5) (a) (2) により $AB = BA$ を示せばよい．AB の任意の元は $a \in A, b \in B$ により ab とかけるが，$A \trianglelefteq G$ より，ある $a' \in A$ を用いて $ab = bb^{-1}ab = ba'$ と変形でき，$AB \leq BA$．BA の任意の元 ba についても $bab^{-1}b = a'b$ と変形できて，$BA \leq AB$．よって，$AB = BA$ であり，$AB \leq G$．

(b) まず，$A \cap B \subseteq AB$ は明らかであり，$A \cap B \leq G$ であるから，$A \cap B \leq AB$ である．

次に $A \cap B$ が AB の正規部分群であることを示す．c を $A \cap B$ の任意の元とするとき，任意の AB の元 g に対して，$gcg^{-1} \in A \cap B$ を示せばよい．まず，g はある $a \in A, b \in B$ を用いて，$g = ab$ とかける．このとき $A \trianglelefteq G$ から，ある $a' \in A$ により，$gcg^{-1} = abcb^{-1}a^{-1} = a'$ とかけ，A の可換性により，$bcb^{-1} = a^{-1}a'a = a'$ と変形できる．ここで，$b, c \in B, B \leq G$ から $a' \in B$ が成立する．すると，$c = b^{-1}a'b$ と変形したとき，$b^{-1}a'b \in B$ であり，$A \trianglelefteq G$ から $b^{-1}a'b \in A$ でもある．よって，$c \in A \cap B$ であり，$A \cap B \trianglelefteq AB$ である．

(6) (a) $z_1, z_2 \in Z(G)$ とすると，$\forall g \in G, z_1z_2^{-1}g = gz_1z_2^{-1}$ が成り立つことから，$Z(G) \leq G$．更に，任意の $g \in G, z \in Z(G)$ に対して，$gzg^{-1} = gg^{-1}z = z \in Z(G)$ が成立するので，$Z(G) \trianglelefteq G$ である．よって，商群 $G/Z(G)$ は定義される．

(b) $G/Z(G)$ が巡回群であるとすると，ある元 $aZ(G) \in G/Z(G)$ により，$G/Z(G)$ の任意の元 $gZ(G)$ はある整数 $k \in \mathbb{Z}$ を用いて $g = a^kZ(G)$ とかける．つまり, G の任意の元 g_1, g_2 は $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, z_1, z_2 \in Z(G)$ を用いて，$g_1 = a^{k_1}z_1, g_2 = a^{k_2}z_2$ とかける．すると，z_1, z_2 が G の任意の元と可換であることから，$g_1g_2 = a^{k_1}z_1a^{k_2}z_2 = a^{k_1}a^{k_2}z_1z_2 = a^{k_2}a^{k_1}z_2z_1 = a^{k_2}z_2a^{k_1}z_1 = g_2g_1$ が成立し，G は可換群である．

(7) (a) [G の正規部分群であること]

まず, $[G, G]$ は G の演算について閉じており, 単位元として e_G, $n \in [G, G]$ の逆元として $n^{-1} \in [G, G]$（次式の逆元を考えればよい）が取れるので，$[G, G] \leq G$ である．次に，$[G, G]$ が G の正規部分群であることを示す．任意の $n \in [G, G]$ は，ある $x_i, y_i \in G$ $(i = 1, \cdots, k)$ の積により，

$$n = \prod_{i=1}^{k} x_i^{-1}y_i^{-1}x_iy_i$$

とかける（ここでは $i = 1, \ldots, k$ の順で右から乗じていくものとする）．

このとき，任意の $g \in G$ に対して

$$gng^{-1} = \prod_{i=1}^{k}(gx_ig^{-1})^{-1}(gy_ig^{-1})^{-1}(gx_ig^{-1})(gy_ig^{-1}) \in [G, G]$$

から $G \trianglelefteq [G, G]$．

[$G/[G, G]$ が可換群であること]

任意の $x[G, G], y[G, G] \in G/[G, G]$ に対して, $x^{-1}y^{-1}xy \in [G, G]$ であることから, $xy[G, G] = yx[G, G]$ が成り立ち，可換である．

(b) G/N が可換であると仮定する．このとき，任意の $xN, yN \in G/N$ について $xyN = yxN$，つまり $x^{-1}y^{-1}xyN = N$ が成り立つ．よって，$[x, y] \in N$ であり，$[G, G] \subseteq N$ である．

逆に，$[G, G] \subseteq N$ を仮定する．このとき，任意の $x, y \in G$ について，$[x, y] \in [G, G]$ が成立する．仮定より $[x, y] \in N$ であるから，$[x, y]N = N$ であり，$xyN = yxN$ が成立する．x, y は任意であったから，G/N は可換群である．

(8) $H, K \trianglelefteq G$ であるから，任意の $x \in H, y \in K$ に対し，$x^{-1}y^{-1}x \in K, y^{-1}xy \in H$ が成立する．前者に右から y をかけて $x^{-1}y^{-1}xy \in K$，後者に左から x^{-1} をかけて $x^{-1}y^{-1}xy \in H$ が得られるので，条件より $x^{-1}y^{-1}xy = e$ つまり $xy = yx$ を得る．

(9) (a) $N_G(N) = G$ を仮定すると，任意の $g \in G$ について $gNg^{-1} = N$ より，$N \trianglelefteq G$ となる．逆に，$N \trianglelefteq G$ を仮定すると，任意の $g \in G$ について $gNg^{-1} = N$ より $g \in N_G(N)$ であり，$G \leq N_G(N)$ から $N_G(N) = G$ となる．

(b) 任意の $h \in H(\leq N_G(K))$ について，$hKh^{-1} = K$ が成り立ち，$K \leq H$ であるから，$K \trianglelefteq H$ である．

(10) (a) (5a) とほぼ同様．(2) より $AB = BA$ を示せばよい．任意の AB の元は $a \in A, b \in B$ により，ab とかけるが，$A \leq N_G(B)$ より，ある $b' \in B$ が存在して，$ab = aba^{-1}a = b'a \in BA$ となる．同様に，BA の任意の元 ba について $ba = aa^{-1}ba = ab' \in AB$ となる．よって，$AB = BA$ であり，$AB \leq G$ である．

(b) AB は G の部分群であるので，$B \leq AB$．また，$A \cap B \leq A$ も自明である．

[$B \trianglelefteq AB$ の証明]

$A \leq N_G(B)$, $B \leq N_G(B)$ より，$AB \leq N_G(B)$ が成立．$AB \leq B \leq G$，$AB \leq N_G(B)$ が成り立つので，(9b) により $B \trianglelefteq AB$ が成立．

[$A \cap B \trianglelefteq A$ の証明]

任意の $c \in A \cap B, a \in A$ について $a \in N_G(B)$ であるから，$aca^{-1} \in B$ かつ $aca^{-1} \in A$ が成立．よって，$aca^{-1} \in A \cap B$ であり，$A \cap B \trianglelefteq A$

(c) 写像 $\phi : A \to AB/B$ を $a \mapsto \phi(a) = aB$ で定義すると，ϕ は全射な準同型写像となる．実際，任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して，$\phi(a_1a_2) = a_1a_2B = a_1Ba_2B = \phi(a_1)\phi(a_2)$ とできる．全射であることは明らか．つまり，$\mathrm{Im}\,\phi = AB/B$ である．また，$\mathrm{Ker}\,\phi = \{a \in A \mid \phi(a) = e_BB\} = \{a \in A \mid aB = e_BB\} = \{a \in A \mid a \in B\} = A \cap B$．よって，準同型定理により $A/A \cap B \simeq AB/B$ となる．

(11) (a) まず，$K/H \subseteq G/H$ であることと，任意の $k_1H, k_2H \in K/H$ に対して，$k_1k_2^{-1}H \in K/H$ であることから，$K/H \leq G/H$ である．さらに，任意の $gH \in G/H, kH \in K/H$ に対して，ある $k' \in K$ が存在して，$gkg^{-1}H = k'H$ とかけることから，$K/H \trianglelefteq G/H$ となる．

(b) 写像 $\phi : G/H \to G/K$ を $gH \mapsto gK$ で定めると，これは well-defined であり，全射な準同型写像となる．実際，任意の $g_1H, g_2H \in G/H$ に対して，$g_1H = g_2H$ を仮定すると，$g_1g_2^{-1} \in H$ となる．また，$H \leq K$ より $g_1g_2^{-1} \in K$ も成立する．よって，$\phi(g_1H) = g_1K = g_2K = \phi(g_2H)$ となり，代表元の取り方に依存しない．ϕ が準同型写像であることと，全射であることは明らか．

$\mathrm{Im}\,\phi = G/K$ であり，$\mathrm{Ker}\,\phi = \{gH \in G/H \mid \phi(gH) = e_KK\} = \{gH \in G/H \mid gK = e_KK\} = \{gH \in G/H \mid g \in K\} = K/H$ であるから，準同型定理により，$(G/H)/(K/H) \simeq G/K$ が示せる．

問題 3

(1) (a) 既出の巡回置換に含まれていない数字を選び，その数字が含まれる巡回置換を追加するという行為を繰り返せばサイクル分解を行える．

(b)

$$n! \prod_{l=1}^{n} \frac{(l-1)!^{c_l}}{l!^{c_l}(c_l)!} = \frac{n!}{\prod_{l=1}^{n} l^{c_i} c_l!}$$

(c) $(d_1\ d_2\ d_3 \cdots\ d_k)$ は $(d_1\ d_k)(d_1\ d_{k-1})\cdots(d_1\ d_2)$ とすればよい．

(d) 互換は，$(i\ j)$ $(i < j)$ とかける．このとき，$s_is_{i+1}\cdots s_{j-2}s_{j-1}s_{j-2}\cdots s_{i+1}s_i$ が条件を満たす．

(e) 長さ l の巡回置換は $l-1$ 回の互換の積でかけるとしてよい．巡回置換の長さの和は n であるから，この置換は $n-k$ 個の互換の積でかけるので $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-k}$．つまり，サイクル分解中の巡回置換の個数で偶置換か奇置換かを判別できる．

また，奇数長の巡回置換は偶数個の互換の積でかけるため符号には影響しない．したがって，$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^l$ がわかる．

(f) 置換 σ のサイクル分解が $(a_1\ a_2\ ...\ a_{k_1})(b_1\ b_2\ ...\ b_{k_2})...$ となっているとき，$\tau\sigma\tau^{-1}$ のサイクル分解は $(\tau(a_1)\ \tau(a_2)\ ...\ \tau(a_{k_1}))(\tau(b_1)\ \tau(b_2)\ ...\ \tau(b_{k_2}))...$ とかけるため．これは，$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i)) = \tau(\sigma(i))$ より示せる．

(2) (1) 面の中心を軸とする回転，(2) 辺の中心を軸とする π 回転，(3) 頂点を軸とする回転，(4) 恒等変換の 4 つに分けて考える．回転の角度の候補が合成数個あるときのみ注意すればよい．

(a) 6 面，12 辺，8 頂点である．

(1) $\pi/2, 3\pi/2$ 回転: $3 \times 2n^3$, π 回転: $3 \times n^4$

(2) $6 \times n^3$

(3) $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転 : $4 \times 2n^2$

(4) $1 \times n^6$

以上から，

$$H(n) = \frac{8n^2 + 12n^3 + 3n^4 + n^6}{24}$$

(b) 8 面，12 辺，6 頂点である．

(1) $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転: $4 \times 2n^4$

(2) $6 \times n^4$

(3) $\pi/2, 3\pi/2$ 回転: $3 \times 2n^2$, π 回転: $3 \times n^4$

(4) $1 \times n^8$

以上から

$$O(n) = \frac{6n^2 + 17n^4 + n^8}{24}$$

(c) 12 面，30 辺，20 頂点である．

(1) $2i\pi/5$ $(1 \leq i \leq 4)$ 回転: $6 \times 4n^4$

(2) $15 \times n^6$

(3) $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転: $10 \times 2n^4$

(4) $1 \times n^{12}$

以上から

$$D(n) = \frac{44n^4 + 15n^6 + n^{12}}{60}$$

(d) 20 面，30 辺，12 頂点である．

(1) $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転: $10 \times 2n^8$

(2) $15 \times n^{10}$

(3) $2i\pi/5$ $(1 \leq i \leq 4)$ 回転: $6 \times 4n^4$

(4) $1 \times n^{20}$

以上から

$$I(n) = \frac{24n^4 + 20n^8 + 15n^{10} + n^{20}}{60}$$

配点

- 1.1: 2 点
- 1.2: 2 点
- 1.3: 2 点
- 2.1: 2 点
- 2.2.a, 2.2.b: 2 + 2 点
- 2.3: 2 点
- 2.4: 2 点
- 2.5.a, 2.5.b: 2 + 2 点
- 2.6.a, 2.6.b: 2 + 2 点
- 2.7.a, 2.7.b: 2 + 2 点
- 2.8: 2 点
- 2.9.a, 2.9.b: 2 + 2 点
- 2.10: 2 点
- 2.11: 2 点
- 3.1: 2×6 点
- 3.2: 2×4 点

の 34 (58) 点満点で採点しています．必須問題としての 2.10, 2.11 は高い点数の方をを取っています．