線形代数学 II-1 (上岡)　レポート課題 (4)　答え

問 1. (1) 固有多項式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 6 - 6\lambda + \lambda^2$$

であるので固有値 ($\Leftrightarrow$ 固有多項式の根) は $3 \pm \sqrt{3}$ である. 固有値 $3+\sqrt{3}$ に対する固有空間 $W(1+\sqrt{3})$ は斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} & 1 \\ 2 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解空間に等しいので掃き出し法で求められる:

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} & 1 \\ 2 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{1+\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

基本解 ($\Leftrightarrow$ 解空間の基底) として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

がとれるので

$$W(1+\sqrt{3}) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

である. 同様にして固有値 $3-\sqrt{3}$ に対する固有空間は

$$W(3-\sqrt{3}) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

と分かる.

(2) 計算の詳細は略. 固有値は $0, 3$, 各固有値にたいする固有空間は

$$W(0) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

$$W(3) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

である.

(2) 計算の詳細は略. 固有値は ± 1, 各固有値にたいする固有空間は

$$W(1) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{C} \right\},$$

$$W(-1) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

である.

問 2. (1) $\dim W(1+\sqrt{3}) + \dim W(1-\sqrt{3}) = 1+1 = 2$ より対角化可能である. 対角化のための正則行列 P としては固有ベクトルを並べた

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

がとれる.

(2) $\dim W(0) + \dim W(3) = 1+2 = 3$ より対角化可能である. 対角化のための正則行列 P としては固有ベクトルを並べた

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

がとれる.

(3) $\dim W(1) + \dim W(-1) = 1+1 = 2 < 3$ より対角化不可能である.

問 3. (1) 固有多項式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 1-\lambda^2$$

であるので固有値は ± 1 である. 固有値 1 に対する固有空間 $W(1)$ は斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解空間に等しいので掃き出し法で求められる:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

基本解として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれるので

$$W(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

である. 同様にして固有値 -1 に対する固有空間は

$$W(-1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

と分かる. 対角化のための直交行列 Q としては正規直交固有ベクトルを並べた

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

がとれる.

(2) (1) と同様にして固有値は $1, 4$, 各固有値に対する固有空間は

$$W(1) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W(4) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

と分かる. 対角化のための直交行列 Q を構成するために $W(1)$ の正規直交基底を求める. $W(1)$ の基底

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

にグラム・シュミットの正規直交化法を適用して $W(1)$ の正規直交基底 y_1, y_2 をつくる:

$$y_1' = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y_1 = \frac{y_1'}{\|y_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$y_2' = x_2 - (x_2 \cdot y_1) y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad y_2 = \frac{y_2'}{\|y_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

直交行列 Q としては正規直交固有ベクトルを並べた

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

がとれる.

問 4. 2 次形式 $\alpha(x, y, z)$ は実対称行列を用いて

$$\alpha(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書ける. この実対称行列を A とおくとき A の固有値は $1, 2, 4$, 各固有値に対する固有空間は

$$W(1) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W(2) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W(4) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

である. 特に正規直交固有ベクトルを並べてできる直交行列

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

により A は対角化される:

$${}^tQAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

従って新変数 u, v, w を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

により導入するとき 2 次形式 $\alpha(x, y, z)$ の標準形

$$\alpha(x, y, z) = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} {}^tQAQ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = u^2 + 2v^2 + 4w^4$$

を得る.