線形代数学 II-1 (上岡)　レポート課題 (3) **2014/12/17**

A4 紙に解答して 2015/1/7 (水) の講義時に提出. 答案は採点後に返却する. 提出する答案には氏名, 所属学部・学科, 学生 ID を明記すること. 最終的な答えだけでなく途中計算も書くこと.

問 1. 正則行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を用いて写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$\langle x, y \rangle = {}^t x {}^t A A y \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

このとき $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の内積を与えることを示せ. すなわち $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が次の (I), (II), (III) を満たすことを示せ:

(I) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
(II) 任意の $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ および $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ かつ $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
(III) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle x, x \rangle \geq 0$. ただし等号は $x = 0$ のとき, またそのときに限り成り立つ.

問 2. V を内積空間とする. ベクトル $v_1, \ldots, v_r \in V$ は直交系をなすと仮定する: 任意の $1 \leq j \leq r$ に対して $v_j \neq 0$ かつ任意の $1 \leq j < k \leq r$ に対して $\langle v_j, v_k \rangle = 0$. このとき $v_1, \ldots, v_r$ は線形独立であることを示せ. すなわち $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j = 0$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$) とおくとき $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ が成り立つことを示せ.

問 3. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

にグラム・シュミットの正規直交化法を適用して $\mathbb{R}^3$ の (ユークリッド内積に関する) 正規直交基底をつくれ.

問 4. V を内積空間とする. V の部分空間 W に対して, W のあらゆるベクトルと直交するベクトルの全体

$$W^\perp = \{ x \in V;\ \forall w \in W,\ \langle w, x \rangle = 0 \}$$

を W の**直交補空間**という. W が V の部分空間であるとき $W^\perp$ も V の部分空間であることを示せ.

問 5. (1) 直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ.
(2) 3 次直交行列で行列式が 1 および -1 のものをそれぞれ 5 個ずつ挙げよ.