線形代数学 I-1 (上岡)　レポート課題 (3)　答え

問 1. S_4 に属する置換は次の $4! = 24$ 個である:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} = \mathrm{id},\quad \text{偶置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix} = (12),\quad \text{奇置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix} = (13),\quad \text{奇置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix} = (14),\quad \text{奇置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix} = (23),\quad \text{奇置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix} = (24),\quad \text{奇置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix} = (34),\quad \text{奇置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix} = (123),\quad \text{偶置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix} = (124),\quad \text{偶置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} = (132),\quad \text{偶置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix} = (134),\quad \text{偶置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix} = (142),\quad \text{偶置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix} = (143),\quad \text{偶置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix} = (234),\quad \text{偶置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix} = (243),\quad \text{偶置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} = (1234),\quad \text{奇置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix} = (1243),\quad \text{奇置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix} = (1324),\quad \text{奇置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix} = (1342),\quad \text{奇置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix} = (1423),\quad \text{奇置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} = (1432),\quad \text{奇置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} = (12)(34),\quad \text{偶置換;}\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = (13)(24),\quad \text{偶置換;}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} = (14)(23),\quad \text{偶置換.}$$

問 2. 4 次の行列式の一般形は次の通りである:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_4} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{4} a_{i,\sigma(i)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&\quad - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\
&\quad + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\
&\quad - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.
\end{aligned}$$

問 2. (1) -2, 正則　(2) 10000, 正則　(3) 0, 非正則　(4) 18, 正則　(5) $(ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)$, $ad \neq bc$ かつ $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ ならば正則, さもなければ非正則　(6) 0, 非正則　(7) 0, 非正則　(8) -22, 正則　(9) $x_1x_2x_3(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$, $x_1 \neq 0$ かつ $x_2 \neq 0$ かつ $x_3 \neq 0$ かつ $x_1 \neq x_2$ かつ $x_1 \neq x_3$ かつ $x_2 \neq x_3$ ならば正則, さもなければ非正則　(10) r, $r \neq 0$ ならば正則, $r = 0$ ならば非正則　(11) $r^2 \sin\theta_1$, $r \neq 0$ かつ θ_1 が π の整数倍で無いならば正則, さもなければ非正則

問 3. A の行列式は $\det(A) = -8$ である. また A の余因子はそれぞれ $\Delta_{11} = -1$, $\Delta_{12} = 4$, $\Delta_{13} = -5$, $\Delta_{21} = 4$, $\Delta_{22} = -8$, $\Delta_{23} = 4$, $\Delta_{31} = -5$, $\Delta_{32} = 4$, $\Delta_{33} = -1$ である. 従って逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

問 4. (1) 下三角行列 A の行列式は $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$ すなわち全ての対角成分の積である. 一方 A が正則であるための必要十分条件は $\det(A) \neq 0$ である. ゆえに下三角行列 A が正則であるための必要十分条件は対角成分 a_{ii} が全て非零であることである.　(2) A が正則のとき A の逆行列は A の余因子 Δ_{ij} を用いて $A^{-1} = (\det(A))^{-1}(\Delta_{ji})_{i,j=1,\ldots,n}$ と表される. ただし余因子 Δ_{ij} は, A から第 i 行と第 j 列を除いた行列の行列式に符号 $(-1)^{i+j}$ を掛けたものである. 特に A^{-1} の (i,j) 成分は余因子 Δ_{ji} を $\det(A)$ で割ったものに等しい. 今, 任意の $i < j$ に対して $\Delta_{ji} = 0$ である. 実際 $i < j$ のとき A から第 i 行と第 j 列を除いた行列は次の形にブロック分割できる:

$$\begin{pmatrix} X & O \\ * & Y \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ただし X は j 次正方行列で最終第 j 列の成分は全て零である. (Y は $n-j-1$ 次正方行列である.) 今 $\det(X) = 0$ であり, これより $\Delta_{ji} = (-1)^{i+j}\det(X)\det(Y) = 0$ が従う. 以上より A^{-1} の (i,j) 成分は $i < j$ のとき零である. すなわち A^{-1} は下三角行列である.