線形代数学 I-1 (上岡)　レポート課題 (3) **2014/7/9**

A4 紙に解答して 2014/7/23 (水) の講義時に提出. 答案は採点後に返却する. 提出する答案には氏名, 所属学部・学科, 学生 ID を明記すること. 最終的な答えだけでなく途中計算も書くこと.

問 1. $[4]=\{1,2,3,4\}$ 上の置換 (つまり S_4 の元) を全て列挙せよ. ただし各置換は 2 次元配列または巡回置換の積の形で書け. 各置換が偶置換であるか奇置換であるかも答えよ.
(例) 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ は恒等置換であるので偶置換である. 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=(12)$ は転倒数が奇数 1 なので (または奇数個の互換の積で書けるので) 奇置換である. 等.

問 2. 3 次正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ の行列式の一般形は

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_3}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{3}a_{i,\sigma(i)}\\ &= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}\end{aligned}$$

である. 同様にして 4 次正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1,2,3,4}$ の行列式 $\det(A)$ の一般形を書き下せ.

問 2. 次の正方行列の行列式を計算せよ. また正則行列であるか否か答えよ ((5), (9), (10), (11) は適切に場合分けせよ).

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 9999 & 9998 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & \alpha & \beta \\ z & w & \gamma & \delta \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ -r\sin\theta_1 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ 0 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & r\sin\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$

問 3. 3 次正則行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ および余因子 Δ_{ij} $(i,j=1,2,3)$ の値を計算することにより A の逆行列を求めよ.

問 4. n 次下三角行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ ($i<j$ ならば $a_{ij}=0$) に関する次の命題を証明せよ.
(1) A が正則であるための必要十分条件は, 対角成分 a_{ii} $(i=1,\ldots,n)$ が全て非零であることである.
(2) A が正則のとき A の逆行列は下三角行列である.