線形代数学 II-1 (上岡)　レポート課題 (2)　答え

問 1. (1) スカラーの 0 を用いて $F(\mathbf{0}) = F(0\mathbf{0}) = 0F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$. (2) (1) より $F(x) + F(-x) = F(x - x) = F(0) = 0$. 従って $F(-x) = -F(x)$ である.

問 2. (1)

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

(2) 像 $\operatorname{Im} F$ は A の列ベクトルで張られるので $\operatorname{Im} F = \operatorname{span}({}^t(1,0), {}^t(0,1)) = \mathbb{R}^2$ である. F の核 $\operatorname{Ker} F$ は斉次連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間である. 次元定理より $\dim \operatorname{Ker} F = 2$ なので $\operatorname{Ker} F$ は $Ax = 0$ の線形独立な 2 解により張られる. 従って $\operatorname{Ker} F = \operatorname{span}({}^t(1,-1,0,0), {}^t(0,0,1,-1))$ である.

問 3. 3 個の列ベクトル

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad F(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad F(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

を v_1', v_2' の線形結合で書く. まず $F(v_1)$ に関して連立 1 次方程式

$$F(v_1) = (v_1', v_2') \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

の解は $x = -5, y = 7$ なので $F(v_1) = -5v_1' + 7v_2'$ である. 同様にして $F(v_2) = -6v_1' + 8v_2'$ および $F(v_3) = -10v_1' + 14v_2'$ が分かる. 以上より

$$(F(v_1), F(v_2), F(v_3)) = (v_1', v_2') \begin{pmatrix} -5 & -6 & -10 \\ 7 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. ゆえに $\mathbb{R}^3$ および $\mathbb{R}^2$ の基底 v_1, v_2, v_3 および v_1', v_2' に関する F の表現行列は

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 & -10 \\ 7 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

である.

問 4. (1) 任意の $p(x), q(x) \in \operatorname{Pol}(3)$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} F(\alpha p(x) + \beta q(x)) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\alpha p(x) + \beta q(x)) + \alpha p(x) + \beta q(x) \\ &= \alpha \frac{\mathrm{d}^2 p(x)}{\mathrm{d}x^2} + \beta \frac{\mathrm{d}^2 q(x)}{\mathrm{d}x^2} + \alpha p(x) + \beta q(x) \\ &= \alpha \left\{ \frac{\mathrm{d}^2 p(x)}{\mathrm{d}x^2} + p(x) \right\} + \beta \left\{ \frac{\mathrm{d}^2 q(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x) \right\} = \alpha F(p(x)) + \beta F(q(x)). \end{aligned}$$

従って F は線形変換である. (2) 単項式 $1, x, x^2, x^3$ のそれぞれに F を作用させると

$$F(1) = 1, \qquad F(x) = x, \qquad F(x^2) = 2 + x^2, \qquad F(x^3) = 6x + x^3.$$

従って

$$(F(1), F(x), F(x^2), F(x^3)) = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & 6\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

これより単項式基底 $1, x, x^2, x^3$ に関する F の表現行列は

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & 6\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

である.

問 5. (1) $Ax = 0$ を掃き出し法で解く:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\3 & 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\2 & 0 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}0 & 2 & 4 & 2 & 0\\1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 1 & 0\\1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

従って $Ax = 0$ の解は次のパラメータ表示を持つ:

$$x = \begin{pmatrix}\alpha - \gamma\\-2\alpha - \beta\\\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

ただし $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ は任意定数である. これより $Ax = 0$ の基本解として

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

がとれる. (2) $\operatorname{Ker} F$ は斉次連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間であり, (1) で求めた基本解はこの解空間の基底を与える. 従って $\dim \operatorname{Ker} F = 3$ である. さらに次元定理より $\dim \operatorname{Im} F = 2$ である.