線形代数学 II-1 (上岡)　レポート課題 (2) **2014/11/12**

A4 紙に解答して 2014/11/19 (水) の講義時に提出. 答案は採点後に返却する. 提出する答案には氏名, 所属学部・学科, 学生 ID を明記すること. 最終的な答えだけでなく途中計算も書くこと.

問 1. V と V' を線形空間, $F : V \to V'$ を線形写像とする. 次の命題を証明せよ.
(1) $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$. ただし $\mathbf{0} \in V$, $\mathbf{0}' \in V'$ は零ベクトルである.
(2) 任意の $x \in V$ に対して $F(-x) = -F(x)$ が成り立つ.

問 2. 線形写像 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する:

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ z+w \end{pmatrix}.$$

(1) 行列 A を用いて F を次の形に書け:

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

(2) F の像と核を求めよ.

問 3. 線形変換 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する:

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^3$ の基底 v_1, v_2, v_3 および $\mathbb{R}^2$ の基底 v'_1, v'_2 を次のようにとる:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

この基底に関する F の表現行列を求めよ.

問 4. 高々 3 次の多項式空間 $\mathrm{Pol}(n) = \{\sum_{i=0}^{n} c_i x^i;\ c_i \in \mathbb{R}\}$ の変換 $F : \mathrm{Pol}(3) \to \mathrm{Pol}(3)$ を次で定義する:

$$F(p(x)) = \frac{\mathrm{d}^2 p(x)}{\mathrm{d}x^2} + p(x) \qquad (p(x) \in \mathrm{Pol}(3)).$$

(1) F が線形変換であることを示せ.
(2) $\mathrm{Pol}(3)$ の単項式基底 $1, x, x^2, x^3$ に関する F の表現行列を求めよ.

問 5. 線形写像 $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ を行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を係数とする $F(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^5$) により定める.
(1) 斉次連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の基本解を求めよ.
(2) F の像 $\mathrm{Im}\, F$ および核 $\mathrm{Ker}\, F$ の次元を求めよ.