線形代数学 I-1 (上岡)　レポート課題 (2)　答え

問 1. (計算の詳細は省略)　(1) 2　(2) 3　(3) 2　(4) 2　(5) 3　(6) 3　(7) 2　(8) まず $x = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) の場合

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos n\pi & \cos 2n\pi & \cos 3n\pi \\ \sin n\pi & -\sin 2n\pi & -\sin 3n\pi \\ 1 & \cos 3n\pi & \cos 4n\pi\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} && (n\text{: 偶数}); \\ &= \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} && (n\text{: 奇数})\end{aligned}$$

であるので階数は 1 である. 次に x が π の整数倍で無い場合を考える. このとき $\sin x \neq 0$ であるので次の行基本変形が可能である.

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \sin x & -\sin 2x & -\sin 3x \\ 1 & \cos 3x & \cos 4x\end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix}\cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \sin^2 x & -\sin x \sin 2x & -\sin x \sin 3x \\ 1 & \cos 3x & \cos 4x\end{pmatrix} && (\text{第 2 行を } \sin x \text{ 倍する}) \\ &\to \begin{pmatrix}\cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ 1 & \cos 3x & \cos 4x \\ 1 & \cos 3x & \cos 4x\end{pmatrix} && (\text{第 2 行に第 1 行のを } \cos x \text{ 倍を加える}) \\ &\to \begin{pmatrix}\cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ 1 & \cos 3x & \cos 4x \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} && (\text{第 3 行から第 2 行を引く}) \\ &\to \begin{pmatrix}0 & \cos 2x - \cos x \cos 3x & \cos 3x - \cos x \cos 4x \\ 1 & \cos 3x & \cos 4x \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} && (\text{第 1 行から第 2 行の } \cos x \text{ 倍を引く})\end{aligned}$$

最後の行列の $(1,2)$ 成分および $(1,3)$ 成分はそれぞれ次のように書ける.

$$\begin{aligned}(1,2)\ \text{成分} &= \cos 2x - \cos x \cos 3x = -(\cos^2 x - 1)(4\cos^2 x - 1), \\ (1,3)\ \text{成分} &= \cos 3x - \cos x \cos 4x = -4\cos x(\cos^2 x - 1)(2\cos^2 x - 1)\end{aligned}$$

今 x は π の整数倍ではないので $\cos^2 x \neq 1$ である. ゆえにこの 2 つの成分は同時に 0 にならない. 従って最後の行列は次の形の行列に行基本変形できる:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & * \\ 1 & \cos 3x & \cos 4x \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos 3x & \cos 4x \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

どちらにせよ階数は 2 である. 以上より x が π の整数倍のとき階数は 1, さもなければ階数は 2 である.

問 2. (計算の詳細は省略)

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$; 解は $x = y = \dfrac{1}{2},\ z = -1$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$; 解無し

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 10 \\ 8 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$; 解は $x = \dfrac{20-5\alpha}{18},\ y = \dfrac{35-2\alpha}{9},\ z = \alpha$ (α は任意定数)

(4) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$; 解は $x = 4-\alpha,\ y = 4-\beta,\ z = \beta,\ w = \alpha$ (α と β は任意定数)

(5) $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 12 & 0 & -6 & 21 \\ 0 & 5 & -2 & -10 & -11 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & -9 & -1 & 0 & 23 \end{array}\right)$; 解は $x = \dfrac{2609}{997},\ y = \dfrac{1603}{997},\ z = -\dfrac{8659}{997},\ w = \dfrac{3630}{997}$

(6) $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 7 & -6 & 8 \\ 2 & 15 & -8 & 11 \end{array}\right)$; 解は $x = -\dfrac{43+34\alpha}{29},\ y = \dfrac{27+20\alpha}{29},\ z = \alpha$ (α は任意定数)

(7) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right)$;

解は $x = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma-2\delta}{3},\ y = \dfrac{\alpha+\beta-2\gamma+\delta}{3},\ z = \dfrac{\alpha-2\beta+\gamma+\delta}{3},\ w = \dfrac{-2\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3}$

問 3. (計算の詳細は省略)

(1) 正則. 逆行列は $\dfrac{1}{31}\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (2) 正則. 逆行列は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) 非正則

(4) 非正則 (5) 正則. 逆行列は $\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ (6) 正則. 逆行列は $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(7) 正則. 逆行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{31} & -\frac{9}{31} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{31} & \frac{5}{31} \end{pmatrix}$ (8) 正則. 逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(9) 正則. 逆行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問 4. $(x, y, z) = (a, b, c)$ および $(x, y, z) = (d, e, f)$ はともに (*) の解であるから

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0, \qquad \delta a + \varepsilon b + \varphi c = 0, \qquad \alpha d + \beta e + \gamma f = 0, \qquad \delta d + \varepsilon e + \varphi f = 0$$

が成り立つ. 第 1 式と第 3 式および第 2 式と第 4 式の和をとることにより

$$\alpha(a+d) + \beta(b+e) + \gamma(c+f) = 0, \qquad \delta(a+d) + \varepsilon(b+e) + \varphi(c+f) = 0$$

を得る. これより $(x, y, z) = (a+d, b+e, c+f)$ は (*) の解である.

問 5. まず $E_{n;k,\ell}(\beta)$ $(k \neq \ell)$ の逆行列を求める. $E_{n;k,\ell}(\beta)$ は対角成分が全て 1, (k, ℓ) 成分が β, 他の成分が全て 0 の行列である. 従って次のように行基本変形できる.

$$\begin{array}{l} (E_{n;k,\ell}(\beta), E_n) \\ \qquad \downarrow \quad \text{第 } \ell \text{ 行の } \beta \text{ 倍を第 } k \text{ 行から引く} \\ (E_n, E_{n;k,\ell}(-\beta)) \end{array}$$

ゆえに $E_{n;k,\ell}(\beta)^{-1} = E_{n;k,\ell}(-\beta)$ である. 次に $F_{n;k,\ell}$ $(k < \ell)$ の逆行列を求める. $F_{n;k,\ell}$ は (k, k) 成分と (ℓ, ℓ) 成分を除く対角成分の全ておよび (k, ℓ) 成分と (ℓ, k) 成分が 1, 他の成分が全て 0 の行列である. 従って次のように行基本変形できる.

$$\begin{array}{l} (F_{n;k,\ell}, E_n) \\ \qquad \downarrow \quad \text{第 } k \text{ 行と第 } \ell \text{ 行を入れ替える} \\ (E_n, F_{n;k,\ell}) \end{array}$$

ゆえに $F_{n;k,\ell}^{-1} = F_{n;k,\ell}$ である.