線形代数学 II-1 (上岡)　レポート課題 (1)　答え

問 1. (B) 一般に任意の $v, w \in V$ に対して $v + w = w$ ならば $v = 0$ である. 実際 $v + w = w$ の両辺に w の逆ベクトル $-w$ を加えるとき左辺からは $(v + w) + (-w) = v + (w + (-w)) = v + 0 = v$ (I-2: 和の結合則) を, 右辺からは $w + (-w) = 0$ を得る. 今スカラー倍の分配則 II-3 より $\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0$ が成り立つ. ゆえに $\alpha 0 = 0$ である.
(C) スカラー倍の分配則 II-2 より $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 - 1)v = 0v$ が成り立つ. 命題 (A) より最後の $0v$ は 0 に等しい. ゆえに (逆ベクトルの一意性より) $(-1)v = -v$ である.

問 2. (1) $(0, 0)$ は $\mathbb{R}^2$ の零ベクトルであるので $X = \{(0, 0)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の自明な部分空間である.
(2) X は和に関して閉じていないので $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない. 実際 $(1, 1) + (-1, -1) = (0, 0) \notin X$ である.
(3) X は和とスカラー倍に関して閉じているので $\mathbb{R}^2$ の部分空間である. 実際, 任意の $(x, y), (x', y') \in X$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $(x'', y'') = \alpha(x, y) + \beta(x', y')$ とおくとき, $y = 2x$ かつ $y' = 2x'$ より

$$y'' = \alpha y + \beta y' = 2\alpha x + 2\beta x' = 2(\alpha x + \beta x') = 2x''$$

が成り立つ. すなわち $(x'', y'') \in X$ である.
(4) X はスカラー倍に関して閉じていないので $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない. 実際 $(0, 1) \in X$ に対して $0(0, 1) = (0, 0) \notin X$ である.
(5) X は和に関して閉じていないので $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない. 実際 $(1, 2), (-2, -1) \in X$ に対して $(1, 2) + (-2, -1) = (-1, 1) \notin X$ である.

問 3. (1) 今 $xa_1 + ya_2 + za_3 = 0$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ とおく. この方程式は斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

と等価である. 掃き出し法により

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得るので (*) は唯一つの解 $x = y = z = 0$ を持つ. ゆえに a_1, a_2, a_3 は線形独立である.
(2) A_3 は A_1, A_2 の線形結合で書ける $(A_3 = 3A_1 + 5A_2)$ ので A_1, A_2, A_3 は線形従属である.
(3) 今 $pa_1 + qa_2 + ra_3 = 0$ $(p, q, r \in \mathbb{R})$ とおく. この方程式は

$$(p + q + r)x^2 + \alpha(q + 2r)x + \alpha^2 r = 0$$

すなわち

$$p + q + r = \alpha(q + 2r) = \alpha^2 r = 0$$

と等価である. まず $\alpha = 0$ ならば $p + q + r = 0$ に帰着するが, この方程式は $p = q = r = 0$ 以外に無限個の解を持つ (例えば $(p, q, r) = (1, -1, 0)$). 従ってこの場合 a_1, a_2, a_3 は線形従属である. 一方 $\alpha \neq 0$ ならば

$p+q+r=q+2r=r=0$ に帰着する. この方程式は $p=q=r=0$ 以外に解を持たないので a_1, a_2, a_3 は線形独立である.

問 4. (1) V の任意のベクトルは線形独立な V のベクトル

$$v_1 = (1, 0, -1), \qquad v_2 = (0, 1, -1) \tag{1}$$

の線形結合で書ける. 実際 V の任意のベクトルは $(x, y, -x-y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ と書けるが, これは $xv_1 + yv_2$ に等しい. 従って v_1, v_2 は V の基底であり特に $\dim V = 2$ である.
(2) V の任意の行列 (3 次対称行列) は線形独立な V の 6 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の線形結合で書ける. 実際 3 次対称行列の一般形は

$$\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R})$$

であり, これは $aA + bB + cC + xX + yY + zZ$ に等しい. 従って A, B, C, X, Y, Z は V の基底であり特に $\dim V = 6$ である.
(3) (2) と同様にして

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

が V の基底であることが分かる. 特に $\dim V = 3$ である.
(4) V に属する任意の偶多項式は $ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ の形をしている. 従って線形独立な 3 つの単項式 $1, x^2, x^4 \in \mathrm{Pol}(4)$ は V の基底を与える. 特に $\dim V = 3$ である.

問 5. (1) まず u_1, u_2 を v_1, v_2 の線形結合で書くと

$$u_1 = \frac{-v_1 + v_2}{2}, \qquad u_2 = \frac{-7v_1 + 3v_2}{2}$$

である. 同様に v_1, v_2 を u_1, u_2 の線形結合で書くと

$$v_1 = \frac{3u_1 - u_2}{2}, \qquad v_2 = \frac{7u_1 - u_2}{2}$$

である (行列を用いて書くと

$$(u_1, u_2) = (v_1, v_2)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (v_1, v_2) = (u_1, u_2)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}).$$

従って基底の変換 $(v_1, v_2) \to (u_1, u_2)$ および $(u_1, u_2) \to (v_1, v_2)$ に対する変換行列 P および Q はそれぞれ

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である. 特に $PQ=E$ が成り立つので $Q=P^{-1}$ である.
(2) まず a_0,a_1,a_2 を b_0,b_1,b_2 の線形結合で書くと

$$a_0=b_0-2b_1+b_2,\qquad a_1=-b_1+b_2,\qquad a_2=b_0-b_1+b_2$$

である. 同様に b_0,b_1,b_2 を a_0,a_1,a_2 の線形結合で書くと

$$b_0=-a_1+a_2,\qquad b_1=-a_0+a_2,\qquad b_2=-a_0+a_1+a_2$$

である (行列を用いて書くと

$$(a_0,a_1,a_2)=(b_0,b_1,b_2)\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad (b_0,b_1,b_2)=(a_0,a_1,a_2)\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}).$$

従って基底の変換 $(b_0,b_1,b_2)\to(a_0,a_1,a_2)$ および $(a_0,a_1,a_2)\to(b_0,b_1,b_2)$ に対する変換行列 P および Q はそれぞれ

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

である. 特に $PQ=E$ が成り立つので $Q=P^{-1}$ である.