線形代数学 II-1 (上岡)　レポート課題 (1) **2014/10/22**

A4 紙に解答して 2014/10/29 (水) の講義時に提出. 答案は採点後に返却する. 提出する答案には氏名, 所属学部・学科, 学生 ID を明記すること. 最終的な答えだけでなく途中計算も書くこと.

問 1. V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする. すなわち V は和と (複素数による) スカラー倍の定義された集合であり, 次の 8 条件を満たす:

(I) 和の条件:
  (1) 可換則: 任意の $u, v \in V$ に対して $u + v = v + u$.
  (2) 結合則: 任意の $u, v, w \in V$ に対して $(u + v) + w = u + (v + w)$.
  (3) 零ベクトルの存在: $0 \in V$ が存在して任意の $v \in V$ に対して $v + 0 = v$.
  (4) 逆ベクトルの存在: 任意の $v \in V$ に対して $-v \in V$ が存在して $v + (-v) = 0$.

(II) スカラー倍の条件:
  (1) 結合則: 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と任意の $v \in V$ に対して $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$.
  (2) 分配則 1: 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と任意の $v \in V$ に対して $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
  (3) 分配則 2: 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ と任意の $u, v \in V$ に対して $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
  (4) $1 \in \mathbb{C}$ の恒等作用: 任意の $v \in V$ に対して $1v = v$.

この 8 条件のみを用いて次の 3 つの命題を証明する:

(A) 任意の $v \in V$ に対して $0v = 0$. ただし左辺は v の $0 \in \mathbb{C}$ によるスカラー倍, 右辺の 0 は V の零ベクトルである.
(B) 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\alpha 0 = 0$. ただし両辺の 0 は V の零ベクトルである.
(C) 任意の $v \in V$ に対して $-v = (-1)v$. ただし左辺は v の逆ベクトル, 右辺は v の $-1 \in \mathbb{C}$ によるスカラー倍である.

例えば (A) は次のようにして証明できる:
「今 $0v + 1v = (0 + 1)v = 1v$ が成り立つ (I-2: 和の結合則). $0v + 1v = 1v$ の両辺に $1v = v$ (II-4: 1 の恒等作用) の逆ベクトル $-v$ を加える (I-4: 逆ベクトルの存在). このとき左辺は $(0v + 1v) + (-v) = 0v + (1v + (-v)) = 0v + 0 = 0v$ に等しく (I-2, I-4, I-3), 右辺は $1v + (-v) = 0$ に等しい (I-4). ゆえに $0v = 0$ である.」
同様に上の 8 条件と (既に証明された) 命題 (A) のみを用いて (B), (C) を証明せよ.

問 2. $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ を考える. 次の部分集合 X は $\mathbb{R}^2$ の部分空間をなすか否か, 理由を付けて答えよ.

(1) $X = \{(0, 0)\}$
(2) $X = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$
(3) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 2x\}$ (直線 $y = 2x$ に乗る点全体)
(4) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 2x + 1\}$ (直線 $y = 2x + 1$ に乗る点全体)
(5) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy \geq 0\}$ (第 1 および第 3 象限にある点の全体. ただし x, y 軸を含む)

問 3. 次の $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V のベクトルは線形独立か線形従属か, 理由を付けて答えよ ((3) は α の値で場合分けする).

(1) 数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 行列空間 $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ のベクトル (行列)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) 多項式空間 $V = \mathbb{R}[x]$ のベクトル (多項式)

$$a_1 = x^2, \qquad a_1 = x(x+\alpha), \qquad a_2 = (x+\alpha)^2 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

問 4. 次の $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V の基底を理由を付けて一つ挙げ V の次元を求めよ.

(1) 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$
(2) 行列空間 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ の部分空間 $V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3};\ {}^tA = A\}$ (対称行列空間)
(3) 行列空間 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ の部分空間 $V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3};\ {}^tA = -A\}$ (交代行列空間)
(4) 高々 4 次の多項式空間 $\mathrm{Pol}(4) = \{\sum_{i=0}^4 c_i x^i;\ c_i \in \mathbb{R}\}$ の部分空間 $V = \{a \in \mathrm{Pol}(4);\ a(x) = a(-x)\}$ (偶多項式空間)

問 5. 線形空間の基底の変換に関する次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の二つの基底

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{および} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を考える. 基底の変換 $(v_1, v_2) \to (u_1, u_2)$ および $(u_1, u_2) \to (v_1, v_2)$ に対する変換行列 P および Q をそれぞれ求めよ. さらに $Q = P^{-1}$ であることを確かめよ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の高々 2 次の多項式空間 $\mathrm{Pol}(2) = \{a + bx + cx^2;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ の二つの基底

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 + x, \quad a_2 = 1 + x + x^2 \qquad \text{および} \qquad b_0 = x^2, \quad b_1 = x(1+x), \quad b_2 = (1+x)^2$$

を考える. 基底の変換 $(b_0, b_1, b_2) \to (a_0, a_1, a_2)$ および $(a_0, a_1, a_2) \to (b_0, b_1, b_2)$ に対する変換行列 P および Q をそれぞれ求めよ. さらに $Q = P^{-1}$ であることを確かめよ.