線形代数学 I-1 (上岡)　レポート課題 (1)　答え

問 1. (1) 3×4 行列　(2) 正方行列ではない　(3) $(2,3)$ 成分は 1, $(3,2)$ 成分は 4

(4) 第 2 行は $\begin{matrix} -1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$,　第 3 列は $\begin{matrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{matrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$　(7) ${}^t A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(8) $B = \begin{pmatrix} 35 & 32 & 29 & 26 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \\ 29 & 32 & 35 & 38 \\ 26 & 32 & 38 & 44 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 54 & -2 & -58 \\ -2 & 6 & 14 \\ -58 & 14 & 86 \end{pmatrix}$　(9) $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} C = 146$

問 2.　(1) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 11 & 10 \\ 10 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & -4 \\ -4 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$　(3) 定義できない　(4) $\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{10}{21} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 13 & 19 \\ 19 & 25 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 3\alpha + 2\kappa - \tau & 3\beta + 2\lambda - \phi \\ 3\gamma + 2\mu - \chi & 3\delta + 2\nu - \psi \\ 3\varepsilon + 2\xi - \omega & 3\zeta + 2\pi - \Gamma \\ 3\eta + 2\rho - \Lambda & 3\theta + 2\sigma - \Omega \end{pmatrix}$　(9) 定義できない

(10) $\begin{pmatrix} n & 2(2^n - 1) \\ \frac{3}{4}\{(-3)^n - 1\} & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$

問 3.　(1) $\begin{pmatrix} 37 & 72 & 68 & 57 \\ 35 & 90 & 91 & 81 \end{pmatrix}$　(2) 定義できない　(3) 58　(4) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & 6 \\ 72 & 8 & 48 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 25 & 25 & 8 \end{pmatrix}$　(8) 定義できない

(9) $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -66 & 16 & 2 \\ -107 & 28 & -5 \\ -30 & 8 & -2 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} \alpha\delta\eta\lambda \\ \beta\varepsilon\theta\mu \\ \gamma\zeta\kappa\nu \end{pmatrix}$

(11) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 0 & b^4 & 0 \\ 0 & 0 & c^4 \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(14) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問 4. (1) $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $AX = XA = E$ なる $X = B$ が存在するので A は正則行列である.

(2) C は正則行列であると仮定する. このとき 2 次正方行列 $D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ で $CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすものが存在する. CD の $(1,1)$ 成分は $x+2z$, $(2,1)$ 成分は $2x+4z$ である. 特に $x+2z=1$ かつ $2x+4z=0$ が成り立つが, これは $1 = x+2z = 0$ という矛盾を導く. ゆえに C は正則行列ではない.

問 5. **(あ)** $n_1 \times n_3$ **(い)** $\sum_{k=1}^{n_2} a_{ik}b_{kj}$ **(う)** $n_2 \times n_4$ **(え)** $\sum_{k=1}^{n_3} b_{ik}c_{kj}$ **(お)** $n_1 \times n_4$ **(か)** $\sum_{k=1}^{n_3} x_{ik}c_{kj}$ **(き)** $\sum_{k=1}^{n_3}\sum_{\ell=1}^{n_2} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj}$ **(く)** $\sum_{k=1}^{n_2} a_{ik}y_{kj}$ **(け)** $\sum_{k=1}^{n_2}\sum_{\ell=1}^{n_3} a_{ik}b_{k\ell}c_{\ell j}$

問 6. AE_n の (i,j) 成分は行列積の定義より

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} \tag{**}$$

に等しい. クロネッカーのデルタは $k \neq j$ のとき $\delta_{kj} = 0$ であり $k = j$ のとき $\delta_{jj} = 1$ である. 従って

$$a_{ik}\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & (k \neq j), \\ a_{ij} & (k = j) \end{cases}$$

である. これより (**) の和は a_{ij} に等しい. 以上より AE_n の (i,j) 成分は A の (i,j) 成分 a_{ij} と等しいことが分かった. AE_n と A はともに $m \times n$ 行列であるので $AE_n = A$ が成り立つ.