線形代数学 I-1 (上岡)　レポート課題 (1) **2014/4/23**

A4 紙に解答して 2014/5/7 (水) の講義時に提出. 答案は採点後に返却する. 提出する答案には氏名, 所属学部・学科, 学生 ID を明記すること. 最終的な答えだけでなく途中計算も書くこと.

問 1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

について次の問いに答えよ.

(1) A は何 $\times$ 何行列か.
(2) A は正方行列か否か.
(3) A の $(2,3)$ 成分と $(3,2)$ 成分はそれぞれ何か.
(4) A の第 2 行と第 3 列をそれぞれ書け.
(5) A の行ベクトルを全て書け.
(6) A の列ベクトルを全て書け.
(7) A の転置行列 ${}^tA$ を書け.
(8) $B = A{}^tA$ と $C = {}^tAA$ を求めよ.
(9) (8) で求めた B と C のトレースをそれぞれ求めよ.

問 2. 次の計算をせよ. ただし演算が定義できない場合は「定義できない」と書け.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -8 & 6 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 10 & -6 & -8 \\ 4 & -20 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 2 & -10 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 17 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 & 29 \\ 31 & 37 \end{pmatrix}$

(8) $3\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \\ \xi & \pi \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tau & \phi \\ \chi & \psi \\ \omega & \Gamma \\ \Lambda & \Omega \end{pmatrix}$

(9) $2\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & \ell \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$

(10) 任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2^k \\ -3^k & k \end{pmatrix}$ (一般項を求めよ)

(**注意**: (8) の $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ はギリシャ文字である.)

問 3. 次の計算をせよ. ただし演算が定義できない場合は「定義できない」と書け.

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 12345 \\ 6 & 1 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 8 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$

(11) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ に対して A^2, A^3, A^4 を求めよ. ただし $A^n = \overbrace{AA \cdots A}^{n}$ (n 個の A の積) である.

(12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(14) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して A^2, A^3, A^4, A^5 を求めよ.

問 4. 次の問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の積 AB と BA を計算せよ. A は正則行列か否か理由を付けて答えよ.

(2) 2 次対称行列

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

は正則行列か否か理由を付けて答えよ. (**ヒント**:

$$D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とおいて $CD = DC = E$ が成り立つための x, y, z, w の満たすべき条件を探す.)

問 5. 次の **(あ)–(け)** を埋めて証明を完成させよ. ただし **(あ)** と **(う)** に入るのは行列の大きさ (何 $\times$ 何) である.

3 つの行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ を考える. ただし A は $n_1 \times n_2$ 行列, B は $n_2 \times n_3$ 行列, C は $n_3 \times n_4$ 行列である. 行列積の定義に基づいて**行列積の結合則**

$$(AB)C = A(BC)$$

を証明する. 行列 $X = (x_{ij})$ および $Y = (y_{ij})$ をそれぞれ

$$X = AB, \qquad Y = BC$$

により定める. このとき X は **(あ)** 行列であり, X の (i, j) 成分 x_{ij} は a_{ij} と b_{ij} を用いて $x_{ij} =$ **(い)** と表すことができる. 同様に Y は **(う)** 行列であり, Y の (i, j) 成分 y_{ij} は b_{ij} と c_{ij} を用いて $y_{ij} =$ **(え)** と表すことができる. 次に行列 $Z = (z_{ij})$ および $W = (w_{ij})$ をそれぞれ

$$Z = XC, \qquad W = AY$$

により定める. このとき Z は **(お)** 行列であり, Z の (i, j) 成分 z_{ij} は x_{ij} と c_{ij} を用いて $z_{ij} =$ **(か)** と表すことができる. さらに $x_{ij} =$ **(い)** を代入することにより z_{ij} の a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} による表示 $z_{ij} =$ **(き)** を得る. 同様に W の (i, j) 成分 w_{ij} は a_{ij} と y_{ij} を用いて $w_{ij} =$ **(く)** と表すことができる. さらに $y_{ij} =$ **(え)** を代入することにより w_{ij} の a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} による表示 $w_{ij} =$ **(け)** を得る. 以上より Z と W は同じ大きさの行列であり, しかも $z_{ij} = w_{ij}$ が成り立つ. これより $Z = W$ であり, これは $XC = AY$ さらには $(AB)C = A(BC)$ と等価である.

問 6. $A = (a_{ij})$ を任意の $m \times n$ 行列とする. m 次単位行列 E_m を左から掛けるとき $E_m A = A$ が成り立つことを証明する. 単位行列の (i, j) 成分は δ_{ij} (クロネッカーのデルタ) により与えられる. 従って $E_m A$ の (i, j) 成分は行列積の定義より

$$\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} a_{kj} \tag{*}$$

に等しい. クロネッカーのデルタは $i \neq k$ のとき $\delta_{ik} = 0$ であり $i = k$ のとき $\delta_{ii} = 1$ である. 従って

$$\delta_{ik} a_{kj} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ a_{ij} & (i = k) \end{cases}$$

である. これより (*) の和は a_{ij} に等しい. 以上より $E_m A$ の (i, j) 成分は A の (i, j) 成分 a_{ij} と等しいことが分かった. $E_m A$ と A はともに $m \times n$ 行列であるので $E_m A = A$ が成り立つ.

(問) 上の証明を参考にして次の命題を証明せよ: 任意の $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して n 次単位行列を右から掛けるとき $AE_n = A$ が成り立つ.