線形代数学 II-1 (上岡)　中間試験　答え

問 1. (1) $(0,0,0)$ は $\mathbb{R}^3$ の零ベクトルなので $\{(0,0,0)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の自明な部分空間である. (2) X はスカラー倍に関して閉じていないので $\mathbb{R}^3$ の部分空間でない. 実際 $(1,0,0) \in X$ に対して $1/2(1,0,0) = (1/2,0,0) \notin X$ である. (3) X は和とスカラー倍に関して閉じているので $\mathbb{R}^3$ の部分空間である. 実際, 任意の $(x,y,z),(x',y',z') \in X$ および $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z') = (\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z')$$

は $(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z') = \alpha(x+y+z)+\beta(x'+y'+z') = 0+0 = 0$ より X に属する.

問 2. (1) a_1,a_2,a_3 は線形独立である. 実際 $xa_1+ya_2+za_3 = 0$ $(x,y,z \in \mathbb{R})$ とおくとき, 等価な斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は唯一つの解 $x=y=z=0$ を持つ. (2) $A_3 = 2A_1 - 4A_2$ より A_3 は他の行列の線形結合で書ける. 従って A_1,A_2,A_3 は線形独立でない. (3) $p_1 = (p_2+p_3)/2$ より p_1 は他の多項式の線形結合で書ける. 従って p_1,p_2,p_3 は線形独立でない.

問 3. (1) 変換 F は行列を用いて

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書けるので線形変換である. (2) まず

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, \qquad F(v_2) = \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \\ 26 \end{pmatrix}, \qquad F(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を v_1,v_2,v_3 の線形結合で書く. $F(v_1) = xv_1+yv_2+zv_3$ $(x,y,z \in \mathbb{R}^3)$ は連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

と等価であるので, これを掃き出し法で解く:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

従って $F(v_1) = 9v_1 - 2v_2 + 11v_3$ である. 同様にして $F(v_2) = 22v_1 - 5v_2 + 26v_3$, $F(v_3) = 7v_1 - 2v_2 + 5v_3$ が分かる. これより

$$(F(v_1),F(v_2),F(v_3)) = (v_1,v_2,v_3)\begin{pmatrix} 9 & 22 & 7 \\ -2 & -5 & -2 \\ 11 & 26 & 5 \end{pmatrix}$$

である. 以上より基底 v_1, v_2, v_3 に関する F の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 9 & 22 & 7 \\ -2 & -5 & -2 \\ 11 & 26 & 5 \end{pmatrix}$$

である.

問 4. (1) 斉次連立 1 次方程式 $Ax = 0$ を掃き出し法で解く:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これより $Ax = 0$ の解はパラメータ表示

$$x = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を持つ. 従って $Ax = 0$ の基本解として

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれる. (2) $\operatorname{Ker} F$ は斉次連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間に等しく, (1) で求めた基本解はその基底である. 従って $\dim \operatorname{Ker} F = 2$ である. さらに次元定理より $\dim \operatorname{Im} F = 4 - 2 = 2$ である.

問 5. (1) $\operatorname{Im} F$ の任意のベクトルは $F(x)$ $(x \in V)$ と書ける. 今 x を V の基底 $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ の線形結合で書く: $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^m \beta_j v_j$ $(\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R})$. ここで両辺に F を作用させる: $F(u_i) = 0$ より $F(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j F(v_j)$. これより $F(x)$ は $F(v_1), \ldots, F(v_m)$ の線形結合で書ける. (2) $\sum_{j=1}^m \beta_j F(v_j) = 0$ $(\beta_j \in \mathbb{R})$ を仮定して $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$ を導けばよい. 今 $y = \sum_{j=1}^m \beta_j v_j$ とおく. このとき仮定より

$$F(y) = F\left(\sum_{j=1}^m \beta_j v_j\right) = \sum_{j=1}^m \beta_j F(v_j) = 0$$

が成り立つ. 従って $y \in \operatorname{Ker} F$ であり, 特に y は $\operatorname{Ker} F$ の基底 $u_1, \ldots, u_n$ の線形結合で書ける: $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. これより

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i - y = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i - \sum_{j=1}^m \beta_j v_j.$$

$u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ は V の基底なので線形独立である. ゆえに上式は $\alpha_i = \beta_j = 0$ を導く. (3) 今 $\dim V = m + n$ かつ $\dim \operatorname{Ker} F = n$ である. また (1), (2) より $F(v_1), \ldots, F(v_m)$ は $\operatorname{Im} F$ の基底なので $\dim \operatorname{Im} F = m$ である. ゆえに $\dim V = m + n = \dim \operatorname{Im} F + \dim \operatorname{Ker} F$ が成り立つ.