

問 1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

に関して次の問に答えよ. (1) A は何 \times 何行列か. (2) A の (1,3) 成分は何か. (3) A の (3,1) 成分は何か. (4) A の第 4 行を書け. (5) A の第 2 列を書け. (6) ${}^t A$ を書け. (7) ${}^t A A$ のトレースを求めよ.

問 2. 次の計算をせよ. ただし演算が定義できない場合は「定義できない」と書け.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1) \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (3 \ 4) + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \text{ は任意の整数})$$

問 3. 次の行列を基本変形により行階段形 (または列階段形) に簡約せよ. さらに行列の階数を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -3 & -1 \\ -13 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 4 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & x \end{pmatrix} \quad (x \text{ は任意の複素数})$$

問 4. 次の連立 1 次方程式の拡大係数行列を書け. さらに掃き出し法 (行基本変形) により解構造を調べよ. (解が存在するか否かを答えよ. 解が存在する場合には解を書け. ただし解が一意的で無い場合は解のパラメータ表示を書け.)

$$(1) \begin{cases} -2x + y + z = 1, \\ x - 3y + z = 2, \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x - y + z = 1, \\ 3x + 2z = 2 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x - y + z - 7w = -2, \\ y + z + 5w = 3, \\ 2x + 4z - 4w = 3 \end{cases}$$

問 5. 次の正方行列が正則か否かを答えよ. 正則ならば逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$