解答例 (解析学 I-1: レポート課題)

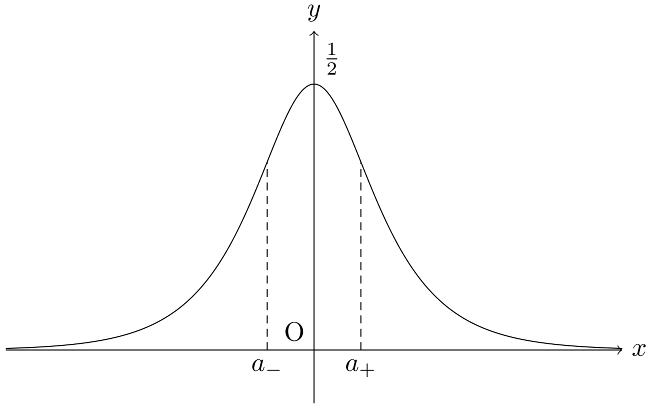
問題 1　(a) $\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$ より, $|p|<1$ のとき $\frac{1}{1-p}$ に収束, $p \geq 1$ のとき ∞ に発散, $p \leq -1$ のとき発散するが $\pm\infty$ には発散しない. (b) $n \geq 3$ のとき $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})$ より, 級数は $\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{11}{18}$ に収束する. (c) 指数関数 e^x の 0 におけるテイラー展開 $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ より, 級数は e^q に収束する.

問題 2　(a) $f'(x) = 4x^3\cos x^4 + 4\sin^3 x\cos x$. (b) $f'(x) = \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n} c_k x^k}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)c_{k+1}x^k$. (c) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3\log x = x^2(3\log x + 1)$ より, $f'(x) = f(x)\cdot x^2(3\log x+1) = x^{x^3+2}(3\log x + 1)$.

問題 3　(a) $\alpha > 0$ のとき ∞, $\alpha = 0$ のとき 1, $\alpha < 0$ のとき 0. (b) 任意の $\alpha \leq 0$ に対して $\lim_{x\to\infty}(1+\mathrm{e}^{\alpha x})^{\frac{1}{x}} = 1$ より, $a \geq b$ のとき $(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{bx})^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a(1+\mathrm{e}^{(b-a)x})^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to\infty} \mathrm{e}^a$. 同様に $a < b$ のとき $(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{bx})^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^b(1+\mathrm{e}^{(a-b)x})^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to\infty} \mathrm{e}^b$. 以上より $\lim_{x\to\infty}(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{bx})^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\max\{a,b\}}$. (c) 極限は $\frac{0}{0}$ の不定形. 分母と分子を微分した後の極限は $\lim_{x\to 0}\frac{a\mathrm{e}^{ax}}{b\mathrm{e}^{bx}} = \frac{a}{b}$. 従ってロピタルの法則より $\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{ax}}{1-\mathrm{e}^{bx}} = \frac{a}{b}$.

問題 4　(a) 関数 f は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能とする. (ただし $a<b$.) このとき $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する. (b) 任意の $x \in (a,b]$ に対して, 平均値の定理より $c \in [a,x] \subset [a,b]$ が存在して $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) = 0$. 特に $f(x) = f(a)$.

問題 5　(a) f は $\mathbb{R}$ 上微分可能なので f の極値点は停留点の中にある. $f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}$ より, f の停留点すなわち $f'(x) = 0$ を満たす x は 0 のみ. さらに $f''(x) = \frac{2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^3} - \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-6}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^3}$, $f''(0) = -\frac{1}{2} < 0$ より停留点 0 は f の極大点. (b) $f''(x) = 0$ が成り立つのは $\mathrm{e}^{2x} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ のときである. $a_\pm = \frac{1}{2}\log(3\pm 2\sqrt{2}) = \log(\sqrt{2}\pm 1)$ とおくとき, $(-\infty, a_-)$ 上および (a_+, ∞) 上 $f'' > 0$ より, f はそこで下に凸. また (a_-, a_+) 上 $f'' < 0$ より, f はそこで上に凸. 従って $a_\pm$ は f の変曲点である. (c) f は $\mathbb{R}$ 上連続だから, 極値点を含まない区間では狭義単調にふるまう. 特に極大点より左側の $(-\infty, 0)$ では狭義単調増加, 右側の $(0,\infty)$ では狭義単調減少である. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ より, f のグラフは無限遠方では x 軸に漸近する. 以上より f のグラフの概形は次のようになる.



問題 6　(a) $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ より $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. (b) テイラーの公式より, x と 0 の間に

ξ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k + \frac{\sin(\xi + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

(c) $|\sin| \leq 1$ より, 任意の x に対して

$$0 \leq \left| \frac{\sin(\xi + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

これより剰余項は $n \to \infty$ の極限において x に依らず 0 に収束する. ゆえに任意の x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

が成り立つ. これが $f(x) = \sin x$ の $x = 0$ におけるテイラー展開である.