

## 解析学 I-1: レポート課題 (2017-06-29)

問題 1 次の級数の収束, 発散を答えよ. 収束する場合はその和を求めよ. 発散する場合は  $\pm\infty$  に発散するか否か答えよ.

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} p^k \qquad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} \qquad (c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{k!}$$

問題 2 次の関数  $f$  の導関数を求めよ.

$$(a) f(x) = \sin x^4 + \sin^4 x \qquad (b) f(x) = \exp\left(\sum_{k=0}^n c_k x^k\right) \qquad (c) f(x) = x^{x^3}$$

問題 3 次の極限を求めよ.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \qquad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{ax} + e^{bx})^{\frac{1}{x}} \qquad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{ax}}{1 - e^{bx}} \quad (b \neq 0)$$

問題 4 次の問いに答えよ.

(a) 平均値の定理を述べよ.

(b) 関数  $f$  は  $[a, b]$  上連続,  $(a, b)$  上微分可能とする. また導関数  $f'$  は  $(a, b)$  上 0 とする. このとき  $f$  は  $[a, b]$  上定数であることを示せ.

問題 5 関数  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$  を考える. 次の問いに答えよ.

(a)  $f$  の極値点を求めよ. 極大, 極小のどちらであるかも述べること.

(b)  $f$  の変曲点を求めよ.

(c)  $f$  のグラフの概形を描け. 極値点, 増減, 曲がる向き (上に凸, 下に凸), 変曲点, 無限遠での挙動が分かるように描くこと.

問題 6 関数  $f(x) = \sin x$  を考える. 次の問いに答えよ.

(a)  $f$  の第  $n$  階導関数を求めよ.

(b)  $n$  を非負整数とする. テイラーの公式を用いて  $f$  を

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + (\text{剰余項}) \quad (c_k: \text{定数})$$

の形に書け. 剰余項も具体的に書き下すこと.

(c) 剰余項の極限を調べることにより,  $f$  の 0 におけるテイラー展開を求めよ.