解答例

問題 1　(a) 今 $|a|<1$ より $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ なので

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a} \to \frac{1}{1-a} \quad (n\to\infty).$$

これより級数は $1/(1-a)$ に収束する．
(b) 初項からの部分和 $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ を考える．$s_{2n}=1$, $s_{2n+1}=0$ $(n=0,1,2,\dots)$ より部分和のつくる数列 $\{s_n\}$ は収束しない．ゆえに級数は収束しない．
(c) 初項からの部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ を考える．$s_{2n-1}=1/n$, $s_{2n}=0$ $(n=1,2,3,\dots)$ より $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. これより級数は 0 に収束する．

問題 2　(a) 極限は ∞.
(b) ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 bx}{\cos^2 ax} = \frac{a}{b}.$$

(c) 対数極限を考える．ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty}\log(\mathrm{e}^x + a\log x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(\mathrm{e}^x + a\log x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x + a/x}{\mathrm{e}^x + a\log x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - a\mathrm{e}^{-x}/x^2}{1 + a\mathrm{e}^{-x}\log x} = 1.$$

従って $\lim_{x\to\infty}(\mathrm{e}^x + a\log x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

問題 3　(a) $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$. $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ $(k=0,1,2,\dots)$ より, $f(x)=\cos x$ の 0 におけるテイラー展開は

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

(b) $f^{(n)}(x) = (\mathrm{e}^x - (-1)^n\mathrm{e}^{-x})/2$ より

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x & (n \text{ は偶数}), \\ \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x & (n \text{ は奇数}). \end{cases}$$

$f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = 1$ $(k=0,1,2,\dots)$ より, $f(x) = \sinh x$ の 0 におけるテイラー展開は

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

(c) $f(x) = \log(x^2) = 2\log x$ より $f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$ $(n=1,2,3,\dots)$. $f(1)=0$, $f^{(n)}(1) = 2(-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n=1,2,3,\dots)$ より, $f(x) = \log(x^2)$ の 1 におけるテイラー展開は

$$\log(x^2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \frac{2(x-1)}{1} - \frac{2(x-1)^2}{2} + \frac{2(x-1)^3}{3} - \frac{2(x-1)^4}{4} + \cdots.$$

問題 4　(a)

$$\int_0^1 (1+2x+3x^2+4x^3)\,\mathrm{d}x = [x+x^2+x^3+x^4]_0^1 = 4.$$

(b) 被積分関数は奇関数かつ積分区間は原点対称だから, 積分は 0.

(c) 部分分数分解すると

$$\int_2^3 \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_2^3 \left\{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}\right\}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\,\mathrm{Arctan}\,x\right]_2^3$$
$$= \frac{\log 3 - \log 2}{4} + \frac{\mathrm{Arctan}\,3 - \mathrm{Arctan}\,2}{2}.$$

(d) 部分積分を用いて

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}\cos(ax)]_0^\infty - a\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin(ax)\,\mathrm{d}x$$
$$= 1 - a[-\mathrm{e}^{-x}\sin(ax)]_0^\infty - a^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x = 1 - a^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x.$$

これより

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a^2}.$$

問題 5　(a) 関数 f は閉区間 $[a,b]$ において連続, 開区間 (a,b) において微分可能とする. このとき $c \in (a,b)$ で

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を満たすものが存在する.

(b) 任意の $a \le x < x' \le b$ に対して, 平均値の定理より

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = f'(c)$$

を満たす c が (x,x') の中に存在する. 特に $c \in (a,b)$ なので仮定より $f'(c) \ge 0$. 従って

$$f(x') - f(x) = f'(c)(x'-x) \ge 0$$

より $f(x) \le f(x')$. 以上より $a \le x < x' \le b$ ならば $f(x) \le f(x')$, すなわち f が $[a,b]$ において広義単調増加であることが示された.