

解析学 I-2 (上岡) レポート課題 (2016-07-21)

問題 1 次の級数が収束するか否か答えよ. 収束する場合はその和を求めよ.

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} a^k \quad (|a| < 1) \qquad (b) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$
$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \left(u_{2k-1} = \frac{1}{k}, u_{2k} = -\frac{1}{k} \right)$$

問題 2 次の極限を計算せよ.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{b_0 + b_1x} \quad (a_3b_1 > 0) \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{\tan(bx)} \quad (b \neq 0)$$
$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + a \log x)^{\frac{1}{x}}$$

問題 3 次の関数 f の a における第 n 階導関数 $f^{(n)}$ を求めよ. さらに f の a におけるテイラー展開を書き下せ. テイラー展開の収束性は調べなくてもよい.

$$(a) f(x) = \cos x \quad [a = 0] \qquad (b) f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad [a = 0]$$
$$(c) f(x) = \log(x^2) \quad [a = 1]$$

問題 4 次の積分を計算せよ.

$$(a) \int_0^1 (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3) dx \qquad (b) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx$$
$$(c) \int_2^3 \frac{x^2}{x^4 - 1} dx \qquad (d) \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(ax) dx$$

問題 5 次の問いに答えよ.

(a) 平均値の定理を述べよ.

(b) 関数 f は閉区間 $[a, b]$ において連続, 開区間 (a, b) において微分可能とする. 任意の $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) \geq 0$ とする. このとき f は $[a, b]$ において広義単調増加 ($x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$) であることを示せ.