解答例

問題 1　(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n - \alpha| < \varepsilon.$
(b) $\alpha > \beta$ と仮定する．$\varepsilon = (\alpha - \beta)/2$ とおく．$\varepsilon > 0$ であり, かつ $\{a_n\}$ は α に $\{b_n\}$ は β にそれぞれ収束するから, ある N が存在して, $n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ かつ $|b_n - \beta| < \varepsilon$ が成り立つ．特に $n > N$ ならば

$$a_n > \alpha - \varepsilon = \frac{\alpha + \beta}{2} = \beta + \varepsilon > b_n$$

が成り立つ．これは問題の仮定に矛盾する．
(c) 一般に成り立つとは限らない．例えば $a_n = 0$ かつ $b_n = 1/2^n$ のとき, $a_n < b_n$ は成り立つが, 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに 0 に収束する．

問題 2　(a) 部分和のなす数列 $\{s_n\}$ ($s_n = \sum_{k=1}^n a_k$) が収束する．
(b) 級数の部分和 $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ は不等式

$$s_1 \le s_3 \le s_5 \le \cdots \le s_4 \le s_2 \le s_0$$

を満たす．これより偶数項のなす数列 $\{s_{2n}\}$ は単調減少かつ下に有界なので収束する．同様に奇数項のなす数列 $\{s_{2n+1}\}$ は単調増加かつ上に有界なので収束する．今 $\alpha = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ および $\beta = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$ とおく．すると

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

より $\alpha = \beta$ を得る．これより数列 $\{s_n\}$ は (α に) 収束する．

問題 3　(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \text{ s.t. } 0 < |x - a| < \delta, |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$
(b) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. または $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \text{ s.t. } |x - a| < \delta, |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
(c) $\varepsilon > 0$ を任意にとる．g は $f(a)$ において連続なので, この ε に対して $\varepsilon' > 0$ が存在して, $|y - f(a)| < \varepsilon'$ を満たす任意の y に対して $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ が成り立つ．さらに f は a において連続なので, この ε' に対して $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ を満たす任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon'$ が成り立つ．これより特に $|x - a| < \delta$ を満たす任意の x に対して $|g \circ f(x) - g \circ f(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ が成り立つ．以上より $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g \circ f(a)$ である．

問題 4　(a) $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha.$
(b) 関数 f は閉区間 $[a, b]$ で連続, 開区間 (a, b) で微分可能とする．このとき $f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する．
(c) 関数 f は閉区間 $[a, b]$ で連続, 開区間 (a, b) で微分可能とする．このとき $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する．
(d) 関数 f は $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能とする．このとき関数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

は $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能であり, また $g(a)=f(a)=g(b)$ を満たす. ゆえにロルの定理より, $c\in(a,b)$ が存在して

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が成り立つ.

問題 5 (a) a を含む開区間 I が存在して, 任意の $x\in I$ に対して $f(x)\geq f(a)$. または $\exists\delta>0$, $\forall x$ s.t. $|x-a|<\delta$, $f(x)\geq f(a)$.
(b) a を含む開区間 I が存在して, 任意の $x\in I$ に対して $f(x)\leq f(a)$. または $\exists\delta>0$, $\forall x$ s.t. $|x-a|<\delta$, $f(x)\leq f(a)$.
(c) f は a において極小であるとする. すると a の十分近傍では $f(x)-f(a)\geq 0$ が成り立つから,

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0\\&=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq 0.\end{aligned}$$

これより $f'(a)=0$ である. 同様に f が a において極大なときは, a の十分近傍では $f(x)-f(a)\leq 0$ が成り立つから

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq 0\\&=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0.\end{aligned}$$

これより $f'(a)=0$ である.
(d) テイラーの公式より, 任意の $x\in I$ $(x\neq a)$ に対して, a と x の間に ξ が存在して

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$$

が成り立つ. ここで f は a において極小または極大だから $f'(a)=0$ である. ゆえに上式右辺の 1 次の項は消去することができる.
(e) I において $f''\geq 0$ とする. このとき上で示したように, 任意の $x\in I$ $(x\neq a)$ に対して, $\xi\in I$ が存在して

$$f(x)-f(a)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2\geq 0$$

が成り立つ. ゆえに f は a において極小である. 同様に $f''\leq 0$ とすると, 任意の $x\in I$ $(x\neq a)$ に対して, $\xi\in I$ が存在して

$$f(x)-f(a)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2\leq 0.$$

これより f は a において極大である.