

解析学 I-2 (上岡) レポート課題 (2016-06-23) [2016-07-27 訂正]

問題 1 次の問いに答えよ.

- (a) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束する ($\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$) ことの定義を述べよ.
- (b) 数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ はそれぞれ α および β に収束するとする. また任意の n に対して $a_n \leq b_n$ が成り立つと仮定する. このとき $\alpha \leq \beta$ が成り立つことを示せ.
- (c) 数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ はそれぞれ α および β に収束するとする. また任意の n に対して $a_n < b_n$ が成り立つと仮定する. このとき $\alpha < \beta$ が必ず成り立つかどうか議論せよ.

問題 2 次の問いに答えよ.

- (a) 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が α に収束する ($\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha$) ことの定義を述べよ.
- (b) 数列 $\{a_n\}$ は非負かつ単調減少 ($a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$) かつ 0 に収束するとする. このとき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$ が収束することを示せ. ただし次の命題を証明なしで用いてよい: 単調増加かつ上に有界な数列は収束する. また単調減少かつ下に有界な数列は収束する.

問題 3 f と g を関数とする. 次の問いに答えよ.

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ の定義を述べよ.
- (b) f が a において連続であることの定義を述べよ.
- (c) f は a において連続, g は $f(a)$ において連続とする. このとき合成関数 $g \circ f$ が a において連続であることを示せ.

問題 4 f を関数とする. 次の問いに答えよ.

- (a) f の a における微分が α である ($\Leftrightarrow f'(a) = \alpha$) ことの定義を述べよ.
- (b) ロルの定理を述べよ.
- (c) 平均値の定理を述べよ.
- (d) ロルの定理を用いて平均値の定理を証明せよ.

問題 5 f を関数とする. 次の問いに答えよ.

- (a) f が a において極小であることの定義を述べよ.
- (b) f が a において極大であることの定義を述べよ.
- (c) f は a において極小または極大とする. また f は a において微分可能とする. このとき $f'(a) = 0$ が成り立つことを示せ.
- (d) f は a において極小または極大とする. また f は a を含む開区間 I で 2 回微分可能とする. テイラーの公式を用いて次の命題を証明せよ: 任意の $x \in I$ ($x \neq a$) に対して, a と x の間に ξ が存在して

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$$

が成り立つ.

- (e) (d) と同じ仮定の下で次の命題を証明せよ: f'' が I において常に非負ならば, f は a において極小である. また f'' が I において常に非正ならば, f は a において極大である.