解析学 II 総合演習 1 (2017-01-26)

問題 1　次の関数 f の 1 階偏導関数をすべて求めよ.

(a)　$f(x,y) = \dfrac{ax}{bx+cy}$　　　(b)　$f(x,y,z) = \sin(x^\alpha y^\beta + z^\gamma)$

問題 2　関数 $z = \cos(x^2 + 2y)$ の変数 x, y が, 変数 u, v の関数として $x = u - v$, $y = uv$ により与えられているとする. このとき連鎖律を用いて, 偏微分 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ を u, v の関数として書き下せ.

問題 3　2 変数関数 $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2)$ について次の問いに答えよ.
(a) f の停留点をすべて求めよ.
(b) f のヘッセ行列を求めよ.
(c) f が停留点において極大, 極小になるか調べよ.

問題 4　関数 $f(x,y) = (x+y)^\alpha$ $(\alpha > 0)$ の $(0,1)$ におけるテイラー展開を, 剰余項も含めて 3 次の項まで求めよ.

解答例 (解析学 II 総合演習 1)

問題 1

(a) $f_x = \dfrac{a}{bx+cy} - \dfrac{abx}{(bx+cy)^2} = \dfrac{acy}{(bx+cy)^2}, \qquad f_y = -\dfrac{acx}{(bx+cy)^2}$

(b) $f_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta \cos(x^\alpha y^\beta + z^\gamma), \qquad f_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1} \cos(x^\alpha y^\beta + z^\gamma), \qquad f_z = \gamma z^{\gamma-1} \cos(x^\alpha y^\beta + z^\gamma)$

問題 2　$z_x = -2x\sin(x^2+2y) = -2(u-v)\sin(u^2+v^2)$, $z_y = -2\sin(x^2+2y) = -2\sin(u^2+v^2)$, $x_u = 1$, $y_u = v$, $x_v = -1$, $y_v = u$ および連鎖律より

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = -2(u-v)\sin(u^2+v^2) - 2v\sin(u^2+v^2) = -2u\sin(u^2+v^2),$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2(u-v)\sin(u^2+v^2) - 2u\sin(u^2+v^2) = -2v\sin(u^2+v^2).$$

問題 3　(a) $f_x = 2x\exp(x^2+y^2)$, $f_y = 2y\exp(x^2+y^2)$ より, f の停留点すなわち $f_x = f_y = 0$ を満たす点は $(0,0)$ のみ.

(b) $f_{xx} = 2(2x^2+1)\exp(x^2+y^2)$, $f_{yy} = 2(2y^2+1)\exp(x^2+y^2)$, $f_{xy} = 4xy\exp(x^2+y^2)$ より, f のヘッセ行列は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xx} & f_{yy} \end{pmatrix} = 2\exp(x^2+y^2)\begin{pmatrix} 2x^2+1 & 2xy \\ 2xy & 2y^2+1 \end{pmatrix}.$$

(c) 停留点 $(0,0)$ におけるヘッセ行列

$$H(0,0) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値は 2 のみ. 固有値がすべて正なので f は停留点 $(0,0)$ において極小になる.

問題 4　f の 3 階までの偏導関数は

$$f_x = f_y = \alpha(x+y)^{\alpha-1},$$
$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = \alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2},$$
$$f_{xxx} = f_{xxy} = f_{xyy} = f_{yyy} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(x+y)^{\alpha-3}.$$

これより (x,y) と $(0,1)$ を結ぶ線分上に (ξ,η) が存在して

$$\begin{aligned}(x+y)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(y-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \alpha(\alpha-1)x(y-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(y-1)^2 + R \\ &= 1 + \alpha(x+y-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x+y-1)^2 + R.\end{aligned}$$

ただし剰余項 R は

$$\begin{aligned}R &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(\xi+\eta)^{\alpha-3}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}(\xi+\eta)^{\alpha-3}x^2(y-1) \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}(\xi+\eta)^{\alpha-3}x(y-1)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(\xi+\eta)^{\alpha-3}(y-1)^3 \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(\xi+\eta)^{\alpha-3}(x+y-1)^3.\end{aligned}$$

解析学 II 総合演習 2 (2017-01-26)

問題 1　次の積分を計算せよ．

(a) $\displaystyle\int_{\substack{0\le x\le 1\\ 1\le y\le 2}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x+y}$　　(b) $\displaystyle\int_{\substack{x\ge 0\\ y\ge 0\\ x+y\le 1}} x^{\alpha}(x+y)^{\beta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\alpha\ge 0,\ \beta\ge 0)$

問題 2　次の積分を, 指定された変数変換を用いて計算せよ．

(a) $\displaystyle\int_{\substack{0\le x+y\le 1\\ 0\le x-y\le 1}} (x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$　　変数変換: $u=x+y$, $v=x-y$

(b) $\displaystyle\int_{\substack{x\ge 0\\ y\ge 0\\ x^2+y^2\le a^2}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (a\ge 0),$　　変数変換: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

問題 3　次の広義積分を計算せよ．ただし積分領域の近似列 $\{K_n\}$ をつくり, K_n における積分の極限として広義積分を求めること．

(a) $\displaystyle\int_{\substack{0<x\le 1\\ 0<y\le 1}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y}}$　　(b) $\displaystyle\int_{y\ge 0} \exp(-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

問題 4　3 次元空間の原点を中心とする半径 a の球 $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ と, z 軸を中心軸とする半径 b の円柱 $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\le b^2\}$ を考える．$a\ge b\ge 0$ のとき, 共通部分 $A\cap B$ の体積を求めよ．

解答例 (解析学 II 総合演習 2)

問題 1

(a) $$\int_{\substack{0\le x\le 1\\ 1\le y\le 2}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x+y} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{x+y} = \int_0^1 \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 3\log 3 - 4\log 2.$$

(b) $$\int_{\substack{x\ge 0\\ y\ge 0\\ x+y\le 1}} x^\alpha (x+y)^\beta \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x+y)^\beta \mathrm{d}y = \frac{1}{\beta+1}\int_0^1 x^\alpha (1-x^{\beta+1})\mathrm{d}x = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+2)}.$$

問題 2　(a) 変数変換 $u=x+y$, $v=x-y$ すなわち $x=(u+v)/2$, $y=(u-v)/2$ のヤコビ行列式は $-1/2$ だから

$$\int_{\substack{0\le x+y\le 1\\ 0\le x-y\le 1}} (x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\substack{0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1}} uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 u\mathrm{d}u \int_0^1 v\mathrm{d}v = \frac{1}{8}.$$

(b) 2 次元極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のヤコビ行列式は r だから

$$\int_{\substack{x\ge 0\\ y\ge 0\\ x^2+y^2\le a^2}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\substack{0\le r\le a\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^a r^3\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{a^4}{8}.$$

問題 3　(a) $K_n=[1/n,1]\times[1/n,1]$ とするとき, $\{K_n\}$ は積分領域の近似列であり,

$$\int_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y}} = \int_{\substack{\frac{1}{n}\le x\le 1\\ \frac{1}{n}\le y\le 1}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y}} = \int_{\frac{1}{n}}^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y}} = 2\int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{4}{3}\left\{2\sqrt{2} - 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{8(\sqrt{2}-1)}{3}.$$

ゆえに広義積分は $8(\sqrt{2}-1)/3$ である.

(b) $K_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le n^2\}$ とするとき, $\{K_n\}$ は積分領域の近似列であり,

$$\int_{K_n} \exp(-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\substack{y\ge 0\\ x^2+y^2\le n^2}} \exp(-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\substack{0\le r\le n\\ 0\le\theta\le\pi}} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^n r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-n^2})}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

(途中で 2 次元極座標に変換した). ゆえに広義積分は $\pi/2$ である.

問題 4　$A\cap B$ の体積は積分 $\int_{A\cap B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ で与えられる. 円柱座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$ に変数変換して計算すると

$$\int_{A\cap B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\substack{0\le r\le b\\ 0\le\theta<2\pi\\ -\sqrt{a^2-r^2}\le z\le\sqrt{a^2-r^2}}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^b r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}z = 4\pi\int_0^b r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r$$
$$= \frac{4\pi\{a^3-(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}\}}{3}.$$

これが $A\cap B$ の体積である.