13　広義積分（2020-01-16）

次の定理を証明なしで用いてよい．

定理 S.（有界とは限らない）集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ は次を満たすとする：任意の可測な有界集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対して $A \cap X$ は可測である．また（A 上有界とは限らない）関数 f は A 上連続かつ非負とする．このとき f の A 上の広義積分は ∞ も含めて定まり，任意の A の近似列 $\{K_k\}_{k=1,2,3,\ldots}$ に対して

$$\int_A f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_{K_k} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．

問題 1　集合 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x^2 + y^2 \leq R^2\}$（$R > 0$）および A 上の関数 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha}$（$\alpha > 0$）を考える．

(a) f は A 上有界でないことを示せ．

(b) A の近似列 $\{K_k\}_{k=1,2,3,\ldots}$ をひとつ挙げよ．ただし各 K_k 上 f は有界であること．

(c) 積分 $I_k = \int_{K_k} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を求めよ．

(d) 広義積分 $I = \int_A f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0<x^2+y^2\leq R^2}(x^2+y^2)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を求めよ．

問題 2　集合 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y < 1\}$ および A 上の関数 $f(x,y) = (1-x-y)^{-\alpha}$（$0 < \alpha < 1$）を考える．

(a) f は A 上有界でないことを示せ．

(b) A の近似列 $\{K_k\}_{k=1,2,3,\ldots}$ をひとつ挙げよ．ただし各 K_k 上 f は有界であること．

(c) 積分 $I_k = \int_{K_k} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を求めよ．

(d) 広義積分 $I = \int_A f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0\\ x+y<1}}(1-x-y)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を求めよ．

問題 3　広義積分 $I = \int_0^\infty \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ を求める．

(a) $I^2 = \int_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0}}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を示せ．

(b) I を求めよ．

解答例（第 13 回）

問題 1　(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\infty$ より f は A 上有界でない．
(b) 例えば $K_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{1}{k^2}\le x^2+y^2\le R^2\}$．
(c) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおいて極座標に変換する．関数 $(r,\theta)\mapsto(x,y)$ のヤコビ行列式は r なので $I_k=\int_{\substack{\frac{1}{k}\le r\le R\\ 0\le\theta\le 2\pi}} f\times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_{\substack{\frac{1}{k}\le r\le R\\ 0\le\theta\le 2\pi}} r^{1-2\alpha}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=(\int_{\frac{1}{k}}^{R} r^{1-2\alpha}\,\mathrm{d}r)(\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\theta)=2\pi\int_{\frac{1}{k}}^{R} r^{1-2\alpha}\,\mathrm{d}r$．ここで $\alpha\ne 1$ のとき $\int_{\frac{1}{k}}^{R} r^{1-2\alpha}\,\mathrm{d}r=[\frac{r^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}]_{r=\frac{1}{k}}^{R}=\frac{R^{2-2\alpha}-k^{2\alpha-2}}{2-2\alpha}$．また $\alpha=1$ のとき $\int_{\frac{1}{k}}^{R} r^{-1}\,\mathrm{d}r=[\log r]_{r=\frac{1}{k}}^{R}=\log R-\log\frac{1}{k}=\log Rk$．従って $I_k=2\pi\times\frac{R^{2-2\alpha}-k^{2\alpha-2}}{2-2\alpha}=\frac{\pi(R^{2-2\alpha}-k^{2\alpha-2})}{1-\alpha}$　$(\alpha\ne 1)$，$2\pi\log Rk$　$(\alpha=1)$．
(d) A は（可測な円盤 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le R^2\}$ と 1 点集合 $\{(0,0)\}$ の差なので）可測．従って任意の可測な有界集合 $X\subset\mathbb{R}^2$ に対して $A\cap X$ は可測．また f は A を含む集合 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上連続かつ非負．ゆえに定理 S より $I=\lim_{k\to\infty} I_k$．(c) より $\alpha\ne 1$ のとき $I_k=\frac{\pi(R^{2-2\alpha}-k^{2\alpha-2})}{1-\alpha}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{\pi R^{2-2\alpha}}{1-\alpha}$　$(0<\alpha<1)$，∞　$(\alpha>1)$．また $\alpha=1$ のとき $I_k=2\pi\log Rk\xrightarrow{k\to\infty}\infty$．ゆえに $I=\frac{\pi R^{2-2\alpha}}{1-\alpha}$　$(0<\alpha<1)$，∞　$(\alpha\ge 1)$．

問題 2　(a) A 上の点列 $\{(x_k,y_k)\}_{k=1,2,3,\ldots}$ を $x_k+y_k=1-\frac{1}{k}$ を満たすようにとる．このとき $f(x_k,y_k)=k^\alpha$ より $\lim_{k\to\infty} f(x_k,y_k)=\infty$．これより f は A 上有界でない．
(b) 例えば $K_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1-\frac{1}{k}\}$．
(c) $I_k=\int_{\substack{0\le x\le 1-\frac{1}{k}\\ 0\le y\le 1-\frac{1}{k}-x}} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{1-\frac{1}{k}}\{\int_0^{1-\frac{1}{k}-x}(1-x-y)^{-\alpha}\,\mathrm{d}y\}\,\mathrm{d}x$．累次積分を計算する：(i) $\int_0^{1-\frac{1}{k}-x}(1-x-y)^{-\alpha}\,\mathrm{d}y=[-\frac{(1-x-y)^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_{y=0}^{y=1-\frac{1}{k}-x}=\frac{(1-x)^{1-\alpha}-k^{\alpha-1}}{1-\alpha}$．(ii) $I_k=\int_0^{1-\frac{1}{k}}\frac{(1-x)^{1-\alpha}-k^{\alpha-1}}{1-\alpha}\,\mathrm{d}x=[-\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{k^{\alpha-1}x}{1-\alpha}]_{x=0}^{x=1-\frac{1}{k}}=\frac{1-k^{\alpha-2}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{k^{\alpha-1}(1-k^{-1})}{1-\alpha}$．
(d) A は（可測な閉縦線集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$ と同じ境界を持つので）可測．従って任意の可測な有界集合 $X\subset\mathbb{R}^2$ に対して $A\cap X$ は可測．また f は A を含む集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+y<1\}$ 上連続かつ非負．ゆえに定理 S と (c) より $I=\lim_{k\to\infty} I_k=\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$．

問題 3　(a) 関数 $f(x)=\exp(-x^2)$ および $g(x,y)=\exp(-x^2-y^2)=f(x)\times f(y)$ を考える．広義積分 I の積分範囲 $A=[0,\infty)$ に関して次が成り立つ：任意の可測な有界集合 $X\subset\mathbb{R}$ に対して $A\cap X$ は可測．（$\because$ 集合 X は有界かつ可測とする．このとき X は有界なので $0\le M<\infty$ が存在して $X\subset[-M,M]$．区間 $[0,M]$ は可測なので $A\cap X=[0,M]\cap X$ も可測．）また f は A を含む $\mathbb{R}$ 上連続かつ非負．従って A の近似列として区間 $K_k=[0,k]$（$k=1,2,3,\ldots$）をとると $I_k=\int_{K_k} f\,\mathrm{d}x$ に関して定理 S より $I=\int_A f\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty} I_k$．また広義積分 $J=\int_{\substack{x\ge 0\\ y\ge 0}} g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ の積分範囲 $A^2=[0,\infty)^2$ に関して上と同様に次が成り立つ：任意の可測な有界集合 $Y\subset\mathbb{R}^2$ に関して $A^2\cap Y$ は可測．また g は A^2 を含む $\mathbb{R}^2$ 上連続かつ非負．従って A^2 の近似列として区間 $L_k=[0,k]^2=I_k^2$（$k=1,2,3,\ldots$）をとると $J_k=\int_{L_k} g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ に関して定理 S より $J=\int_{A^2} g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{k\to\infty} J_k$．一方 $J_k=\int_{L_k^2} f(x)\times f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(\int_{L_k} f(x)\,\mathrm{d}x)(\int_{L_k} f(y)\,\mathrm{d}x)=I_k^2$．従って $J=\lim_{k\to\infty} J_k=\lim_{k\to\infty} I_k^2=I^2$．
(b) 広義積分 J の積分範囲の近似列として四半円盤 $K'_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le k^2\}$ をとる．このとき $J'_k=\int_{K'_k} g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\substack{0\le r\le k\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} r\exp(-r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\{\int_0^k r\exp(-r^2)\,\mathrm{d}r\}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}\theta)=[-\frac{\exp(-r^2)}{2}]_{r=0}^{r=k}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\{1-\exp(-k^2)\}$．(a) と同様に定理 S より $J=\lim_{k\to\infty} J_k=\frac{\pi}{4}$．これと (a) より $I^2=\frac{\pi}{4}$．f は非負なので $I\ge 0$．ゆえに $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$．