12　累次積分，積分の変数変換 2（2020-01-09）

問題 1　次の積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_{\substack{x,y\ge 0\\ x+y\le a}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (a\ge 0)$

(b) $\displaystyle\int_{[0,b]^2\setminus[0,a]^2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (0\le a\le b)$

(c) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\le x+y} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(d) $\displaystyle\int_{\substack{x,y\ge 0\\ a^2\le x^2+y^2\le b^2}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (0\le a\le b)$

(e) $\displaystyle\int_{\substack{0\le x\le 1\\ \sqrt{x}\le y\le 1}} \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(f) $\displaystyle\int_{\substack{a\le x\le b\\ |y|\le x}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \qquad (0<a\le b)$

問題 2　任意の $R\ge 0$ に対して，半径 R の n 次元球体 $B_n(R)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ x_1^2+\cdots+x_n^2\le R^2\}$ は可測である．$B_n(R)$ の測度（体積）$\mu(B_n(R))=\int_{B_n(R)}1\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ が

$$\mu(B_n(R))=V_n(R):=\frac{2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\pi^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}R^n}{n!!} \qquad (n=2,3,4,\dots)$$

により与えられることを n に関する帰納法で示す．まず $B_2(R)=\pi R^2$ である．

(a) 次を示せ．

$$V_{2n}(R)=\frac{2^n\pi^nR^{2n}}{(2n)!!},\qquad V_{2n+1}(R)=\frac{2^{n+1}\pi^nR^{2n+1}}{(2n+1)!!}\qquad (n=1,2,3,\dots).$$

(b) 任意の $n=0,1,2,\dots$ に対して $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$ が成り立つことを示せ．

(c) 任意の $n=0,1,2,\dots$ に対して $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$ が成り立つことを示せ．

(d) $n\ge 1$ のとき（任意の $R\ge 0$ に対して）$\mu(B_{2n}(R))=V_{2n}(R)$ が成り立つとする．このとき $\mu(B_{2n+1}(R))=V_{2n+1}(R)$ が成り立つことを示せ．

(e) $n\ge 1$ のとき（任意の $R\ge 0$ に対して）$\mu(B_{2n+1}(R))=V_{2n+1}(R)$ が成り立つとする．このとき $\mu(B_{2n+2}(R))=V_{2n+2}(R)$ が成り立つことを示せ．

解答例（第 12 回）

問題 1　問題の積分をそれぞれ I とおく．

(a) 積分範囲は $0 \le x \le a$ かつ $0 \le y \le a-x$ と表せるので $I = \int_0^a(\int_0^{a-x} xy\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$．累次積分を計算する：(i) $\int_0^{a-x} xy\,\mathrm{d}y = [\frac{xy^2}{2}]_{y=0}^{y=a-x} = \frac{x(a-x)^2}{2}$．(ii) $\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = [-\frac{x(a-x)^3}{6}]_{x=0}^{x=a} + \int_0^a \frac{(a-x)^3}{6}\,\mathrm{d}x = 0 + [-\frac{(a-x)^4}{24}]_{x=0}^{x=a} = \frac{a^4}{24}$．これより $I = \frac{a^4}{24}$．

(b) $z \ge 0$ に対して $I(z) := \int_{[0,z]^2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ とおく．このとき積分範囲に関する加法性より $I_b = I + I_a$．また $I(z)$ の積分範囲は $0 \le x \le z$ かつ $0 \le y \le z$ と表せるので $I(z) = \int_0^z(\int_0^z xy\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = \int_0^z x(\int_0^z y\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = (\int_0^z x\,\mathrm{d}x)(\int_0^z y\,\mathrm{d}y) = (\int_0^z x\,\mathrm{d}x)^2 = (\frac{z^2}{2})^2 = \frac{z^4}{4}$．従って $I = I_b - I_a = \frac{b^4-a^4}{4}$．

(c) 積分範囲は $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 \le (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ と表せる．（中心 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円盤.）そこで $x = \frac{1}{2}+r\cos\theta$，$y = \frac{1}{2}+r\sin\theta$ とおいて変数変換する．このとき（極座標）(r,θ) に関する積分範囲として $0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ かつ $0 \le \theta \le 2\pi$ がとれる．また関数 $\Phi : (r,\theta) \mapsto (x,y)$ のヤコビ行列は $\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ であり，その行列式は $\det\Phi' = r(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = r$．従って $I = \int_{\substack{0\le r\le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0\le\theta\le 2\pi}} xy \times |\det\Phi'|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\substack{0\le r\le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0\le\theta\le 2\pi}} r(\frac{1}{2} + r\cos\theta)(\frac{1}{2}+r\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{\int_0^{2\pi} r(\frac{1}{4}+\frac{r\cos\theta}{2}+\frac{r\sin\theta}{2}+r^2\cos\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\}\,\mathrm{d}r$．ここで $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$ より $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{\int_0^{2\pi}\frac{r}{4}\,\mathrm{d}\theta\}\,\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\pi r}{2}\,\mathrm{d}r = [\frac{\pi r^2}{4}]_{r=0}^{r=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8}$．

(d) $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて極座標に変換する．今，極座標 (r,θ) に関する積分範囲として $a \le r \le b$ かつ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ がとれる．また関数 $(r,\theta) \mapsto (x,y)$ のヤコビ行列式は r．従って $I = \int_{\substack{a\le r\le b \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} xy \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\substack{a\le r\le b \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_a^b(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}r = \int_a^b r^3(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}r = (\int_a^b r^3\,\mathrm{d}r)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)$．ここで $\int_a^b r^3\,\mathrm{d}r = [\frac{r^4}{4}]_{r=a}^{r=b} = \frac{b^4-a^4}{4}$ および $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = [\frac{\sin^2\theta}{2}]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$ より $I = \frac{b^4-a^4}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{b^4-a^4}{8}$．

(e) 積分範囲は $0 \le y \le 1$ かつ $0 \le x \le y^2$ と表せるので $I = \int_0^1(\int_0^{y^2}\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^2\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}y = [\frac{2}{9}(1+y^3)^{\frac{3}{2}}]_{y=0}^{y=1} = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}$．

(f) $x = s$，$y = st$ とおいて変数変換する．このとき s,t に関する積分範囲として（区間）$a \le s \le b$ かつ $-1 \le t \le 1$ がとれる．また関数 $\Phi : (s,t) \mapsto (x,y)$ のヤコビ行列は $\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & s \end{pmatrix}$ であり，その行列式は $\det\Phi' = s$．従って $I = \int_{\substack{a\le s\le b \\ -1\le t\le 1}} \frac{|\det\Phi'|}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_{\substack{a\le s\le b \\ -1\le t\le 1}} \frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{s(1+t^2)} = \int_a^b(\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{s(1+t^2)})\,\mathrm{d}s = \int_a^b\frac{1}{s}(\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2})\,\mathrm{d}s = (\int_a^b\frac{\mathrm{d}s}{s})(\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2})$．ここで $\int_a^b\frac{\mathrm{d}s}{s} = [\log s]_{s=a}^{s=b} = \log\frac{b}{a}$．また $t = \tan\theta$ とおくと $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$．ゆえに $I = \frac{\pi}{2}\log\frac{b}{a}$．

問題 2　(a) $n = 1,2,3,\ldots$ に対して $\lceil\frac{2n}{2}\rceil = \lceil n\rceil = n$ および $\lfloor\frac{2n}{2}\rfloor = \lfloor n\rfloor = n$ より第 1 式を得る．同様に $\lceil\frac{2n+1}{2}\rceil = \lceil n+\frac{1}{2}\rceil = n+1$ および $\lfloor\frac{2n+1}{2}\rfloor = \lfloor n+\frac{1}{2}\rfloor = n$ より第 2 式を得る．

(b) $I_n := \int_{-1}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$ とおく．このとき $x = \sin t$ とおくと $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t$．部分積分により $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\times\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t = [\sin t\times\cos^{2n}t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\times\cos^{2n-1}t\,\mathrm{d}t = 0 + 2n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\times\cos^{2n-1}t\,\mathrm{d}t = 2n(I_{n-1}-I_n)$．これより $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$．また $I_0 = 2$．従って $I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}I_0 = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$．

(c) $J_n := \int_{-1}^1(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ とおく．このとき $x = \sin t$ とおくと $J_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}t\,\mathrm{d}t$．部分積分により $J_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\times\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t = [\sin t\times\cos^{2n+1}t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\times\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t = 0+(2n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\times\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t = (2n+1)(J_{n-1}-J_n)$．これより $J_n = \frac{2n+1}{2n+2}J_{n-1}$．また $J_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$．従っ

て $J_n = \frac{2(2n+1)!!}{(2n+2)!!} J_0 = \frac{\pi(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$.

(d) $\mu(B_{2n+1}(R)) = \int_{B_{2n+1}(R)} 1\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{2n+1} = \int_{-R}^{R} (\int_{B_{2n}((R^2-x_{2n+1}^2)^{\frac{1}{2}})} 1\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{2n})\,\mathrm{d}x_{2n+1} = \int_{-R}^{R} \mu(B_{2n}((R^2-t^2)^{\frac{1}{2}}))\,\mathrm{d}t$. 仮定と (a) より $\mu(B_{2n}((R^2-t^2)^{\frac{1}{2}})) = V_{2n}((R^2-t^2)^{\frac{1}{2}}) = \frac{2^n \pi^n (R^2-t^2)^n}{(2n)!!}$. これより $\mu(B_{2n+1}(R)) = \frac{2^n \pi^n}{(2n)!!} \int_{-R}^{R} (R^2-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \frac{2^n \pi^n R^{2n+1}}{(2n)!!} I_n$.（$\because$ $t = Rx$ とおいた.）従って (b) より $\mu(B_{2n+1}(R)) = \frac{2^n \pi^n R^{2n+1}}{(2n)!!} \times \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^{n+1} \pi^n R^{2n+1}}{(2n+1)!!}$. (a) よりこれは $V_{2n+1}(R)$ に等しい.

(e) (d) と同様にして $\mu(B_{2n+2}(R)) = \frac{2^{n+1} \pi^n R^{2n+2}}{(2n+1)!!} J_n$. (c) より $\mu(B_{2n+1}(R)) = \frac{2^{n+1} \pi^n R^{2n+2}}{(2n+1)!!} \times \frac{\pi(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{2^{n+1} \pi^{n+1} R^{2n+2}}{(2n+2)!!}$. (a) よりこれは $V_{2n+2}(R)$ に等しい.