11　累次積分，積分の変数変換（2019-12-19）

問題 1　半径 $R \geq 0$ の球体 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ の体積 $\mu(A) = \int_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ を 3 次元極座標を用いずに求めよ．ただし半径 $r \geq 0$ の円盤の面積が πr^2 に等しいことを証明なしで用いてよい．

問題 2　半径 $R \geq 0$ の円柱 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ および $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + z^2 \leq R^2\}$ の共通部分 $A \cap B$ の体積 $\mu(A \cap B) = \int_{A \cap B} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ を求めよ．

問題 3　$a \geq 0$ とする．集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq a\}$ の面積 $\mu(A) = \int_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ を求めよ．

問題 4　関数 $f(x, y) = x - y$ と集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq x + y \leq 1,\ -1 \leq x + 2y \leq 2\}$ を考える．積分

$$I = \int_A f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\substack{-1 \leq x+y \leq 1 \\ -1 \leq x+2y \leq 1}} (x - y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

を変数変換 $s = x + y$，$t = x + 2y$ を用いて求めよ．

問題 5　$a, b, c \geq 1$ とする．関数 f は集合 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in [1, a],\ xy \in [1, b],\ xyz \in [1, c]\}$ 上連続とする．このとき

$$\int_A f(x, y, z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_B \frac{f(u, \frac{v}{u}, \frac{w}{v})}{uv} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w$$

が成り立つことを示せ．ただし $B = [1, a] \times [1, b] \times [1, c]$ である．

問題 6　$R \geq 0$ とする．関数 $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$ と集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ を考える．積分

$$I = \int_A f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\substack{x \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq R^2}} \exp(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

を極座標に変換して求めよ．

問題 7　集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して次の命題を示せ．

(a) 任意の点 $\boldsymbol{x} \in \partial(A \cup B)$ に対して次の (i), (ii) の内少なくとも一方が成り立つ：(i) 任意の $\delta > 0$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x}) \cap A \neq \emptyset$. (ii) 任意の $\delta > 0$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x}) \cap B \neq \emptyset$.

(b) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

(c) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$.

(d) A, B が可測ならば $A \setminus B$ も可測である．

解答例（第 11 回）

問題 1　今 $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x\in[-R,R],\ (y,z)\in A^x\}$．ただし $A^x=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2;\ y^2+z^2\le R^2-x^2\}$．これより $\mu(A)=\int_{-R}^{R}(\int_{(y,z)\in A^x}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}\mu(A^x)\,\mathrm{d}x$．ここで A^x は半径 $\sqrt{R^2-x^2}$ の円なので $\mu(A^x)=\pi(R^2-x^2)$．ゆえに $\mu(A)=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=[\pi(R^2x-\frac{x^3}{3})]_{x=-R}^{x=R}=\frac{4\pi R^3}{3}$．

問題 2　$A\cap B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\le R^2,\ x^2+z^2\le R^2\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x\in[-R,R],\ (y,z)\in[-\varphi(x),\varphi(x)]^2\}$．ただし $\varphi(x)=\sqrt{R^2-x^2}$．これより $\mu(A\cap B)=\int_{-R}^{R}(\int_{[-\varphi(x),\varphi(x)]^2}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}\mu([-\varphi(x),\varphi(x)]^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}4(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=[4(R^2x-\frac{x^3}{3})]_{x=-R}^{x=R}=\frac{16R^3}{3}$．

問題 3　関数 $(x,y)=\Phi(s,t)$ を $x=s^2$，$y=t^2$ により定める．このとき集合 $B=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2;\ s,t\ge 0,\ s+t\le a\}$ に関して $\Phi(B)=A$ かつ Φ は B 上単射．またヤコビ行列

$$\Phi'=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2s & 0\\ 0 & 2t\end{pmatrix}$$

は B 上 $st=0$ となる点を除いて正則．そこで $M=\{(x,y)\in A;\ xy=0\}$ および $N=\{(s,t)\in B;\ st=0\}$ とおくと $\Phi(B\setminus N)=A\setminus M$ かつ Φ は $B\setminus N$ 上単射であり Φ' は $B\setminus N$ 上正則．また $\mu(M)=\mu(N)=0$．従って $I=\int_{A\setminus M}1\,\mathrm{d}x\,f\,\mathrm{d}y=\int_{B\setminus N}|\det\Phi'|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_B|\det\Phi'|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_B 4st\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$．今 $B=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2;\ s\in[0,a],\ t\in[0,a-s]\}$ より最後の積分を累次積分に直せて $I=\int_0^a(\int_0^{a-s}4st\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}s$．累次積分を計算する．(i) s を定数と見なして $\int_0^{a-s}4st\,\mathrm{d}t=[2st^2]_{t=0}^{t=a-s}=2s(a-s)^2$．(ii) $I=\int_0^a 2s(a-s)^2\,\mathrm{d}s=[-\frac{2s(a-s)^3}{3}]_{s=0}^{s=a}+\int_0^a\frac{2(a-s)^3}{3}\,\mathrm{d}s=[-\frac{(a-s)^4}{6}]_{s=0}^{s=a}=\frac{a^4}{6}$．

問題 4　関数 $(s,t)=\Psi(x,y)$ を $s=x+y$，$t=x+2y$ により定める：

$$\Psi:\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

係数行列 C は正則なので Ψ は $\mathbb{R}^2$ 上可逆であり

$$\Psi^{-1}:\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}.$$

$\Phi=\Psi^{-1}$ とおくと閉区間 $B=[-1,1]\times[-1,2]$ に関して $\Phi(B)=A$ かつ Φ は B 上単射．またヤコビ行列 $\Phi'=C^{-1}$ は $\mathbb{R}^2$ 上正則．（実際 $\det C^{-1}=(\det C)^{-1}=1\ne 0$.）従って $I=\int_B f(\Phi)\times|\det\Phi'|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_B(3s-2t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{2}(\int_{-1}^{1}(3s-2t)\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}t$．最後の累次積分を計算する．(i) t を定数と見なして $\int_{-1}^{1}(3s-2t)\,\mathrm{d}s=[\frac{3s^2}{2}-2st]_{s=-1}^{s=1}=-4t$．(ii) $I=\int_{-1}^{2}(-4t)\,\mathrm{d}t=[-2t^2]_{t=-1}^{t=2}=-6$．

問題 5　関数 $(x,y,z)=\Phi(u,v,w)$ を $u=x$，$v=xy$，$w=xyz$ すなわち $x=u$，$y=\frac{v}{u}$，$z=\frac{w}{v}$ により定める．このとき $\Phi(B)=A$ かつ Φ は B 上単射．またヤコビ行列

$$\Phi'=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} & 0\\ 0 & -\frac{w}{v^2} & \frac{1}{v}\end{pmatrix}$$

は B 上正則．（実際 $\det\Phi' = \frac{1}{uv}$ は B 上非零.）従って $\int_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_B f(\Phi)\times|\det\Phi'|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \int_B \frac{f(u,\frac{v}{u},\frac{w}{v})}{uv}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$.

問題 6　関数 $(x,y) = \Phi(r,\theta)$ を極座標変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ により定める．このとき閉区間 $B = [0,R]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ および $N = \{(0,\theta)\in B\}$ に関して $\Phi(B\setminus N) = A\setminus\{(0,0)\}$ かつ Φ は $B\setminus N$ 上単射．またヤコビ行列

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

は $B\setminus N$ 上正則．（実際 $\det\Phi' = r(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = r$ は $B\setminus N$ 上非零.）従って $I = \int_B f(\Phi)\times|\det\Phi'|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_B \exp(r^2)\times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^R r\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta = (\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}\theta)(\int_0^R r\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r) = \pi\times[\frac{\mathrm{e}^{r^2}}{2}]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi(\mathrm{e}^{R^2}-1)}{2}$.

問題 7　(a) 点 $\boldsymbol{x}\in\partial(A\cup B)$ を任意にとる．このとき任意の $\delta>0$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap(A\cup B) = (U_\delta(\boldsymbol{x})\cap A)\cup(U_\delta(\boldsymbol{x})\cap B)\neq\emptyset$．今 (i) が成り立たないとする．このとき $U_{\delta'}(\boldsymbol{x})\cap A = \emptyset$ を満たす $\delta'>0$ が存在する．特に任意の $0<\delta\leq\delta'$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x})\subset U_{\delta'}(\boldsymbol{x})$ より $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap A\subset U_{\delta'}(\boldsymbol{x})\cap A = \emptyset$ となるので $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap A = \emptyset$．これより任意の $0<\delta\leq\delta'$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap B\neq\emptyset$ でなければならない．さらに任意の $\delta>\delta'$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x})\supset U_{\delta'}(\boldsymbol{x})$ より $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap B\supset U_{\delta'}(\boldsymbol{x})\cap B\neq\emptyset$ となるので $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap B\neq\emptyset$．ゆえに (ii) が成り立つ．
(b) 点 $\boldsymbol{x}\in\partial(A\cup B)$ を任意にとる．このとき (a) より (i), (ii) の内少なくとも一方が成り立つ．また任意の $\delta>0$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap(A\cup B)^\mathsf{c} = (U_\delta(\boldsymbol{x})\cap A^\mathsf{c})\cap(U_\delta(\boldsymbol{x})\cap B^\mathsf{c})\neq\emptyset$．これより次の (I), (II) はともに成り立つ：(I) 任意の $\delta>0$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap A^\mathsf{c}\neq\emptyset$．(II) 任意の $\delta>0$ に対して $U_\delta(\boldsymbol{x})\cap B^\mathsf{c}\neq\emptyset$．従って (i) が成り立つときは (I) より $\boldsymbol{x}\in\partial A$ が成り立ち，さもなければ (ii) が成り立つので (II) より $\boldsymbol{x}\in\partial B$ である．ゆえに $\boldsymbol{x}\in\partial A\cup\partial B$ が成り立つ．
(c) 任意の集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ に対して $\partial X = \partial X^\mathsf{c}$ が成り立つことに注意すると，(a) より $\partial(A\cap B) = \partial(A\cap B)^\mathsf{c} = \partial(A^\mathsf{c}\cup B^\mathsf{c})\subset\partial A^\mathsf{c}\cup\partial B^\mathsf{c} = \partial A\cup\partial B$.
(d) A,B は可測とする．(b) より $\partial(A\setminus B) = \partial(A\cap B^\mathsf{c})\subset\partial A\cup\partial B^\mathsf{c} = \partial A\cup\partial B$．仮定より ∂A と ∂B はともに零集合なので $\partial A\cup\partial B$ は零集合である．従ってその部分集合である $\partial(A\setminus B)$ も零集合である．ゆえに $A\setminus B$ は可測である．