10　累次積分（2019-12-12）

問題 1　関数 $f(x,y)=x+xy$ と閉区間 $I=[1,2]\times[0,1]$ を考える．

(a) f は I 上可積分であることを示せ．

(b) 任意の $x\in[1,2]$ に対して関数 $f^x(y):=f(x,y)$ は閉区間 $[0,1]$ 上可積分であることを示せ．

(c) f の I 上の積分を累次積分で表せ．

(d) f の I 上の積分を求めよ．

問題 2　関数 $f(x,y)=xy$ と集合 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0\leq x+y\leq 1\}$ を考える．

(a) 集合 $I=\{x\in\mathbb{R};\ (x,y)\in A\}$ を区間で表せ．

(b) $x\in I$ に対して集合 $A^x=\{y\in\mathbb{R};\ (x,y)\in A\}$ を区間で表せ．

(c) f は A 上可積分であることを示せ．

(d) 任意の $x\in I$ に対して関数 $f^x(y):=f(x,y)$ は A^x 上可積分であることを示せ．

(e) f の A 上の積分を累次積分で表せ．

(f) f の A 上の積分を求めよ．

問題 3　次の積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_{\substack{0\leq x\leq\pi\\0\leq y\leq\pi}}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　　(b) $\displaystyle\int_{\substack{0\leq x\leq a\\0\leq y\leq b}}x\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\qquad(a,b\geq 0)$

(c) $\displaystyle\int_{\substack{0\leq x\leq 1\\0\leq y\leq 2\\0\leq z\leq 3}}(xyz+yz+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$　　(d) $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\leq 100}(x-y)(x-z)(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

(e) $\displaystyle\int_{\substack{y\geq 0\\y^2\leq x\leq 1}}y^3\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　　(f) $\displaystyle\int_{0\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq 1}x_1x_2\cdots x_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

問題 4　有界集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ は可測とする．このとき $\int_A 0\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$ が成り立つことを示せ．すなわち $f(\boldsymbol{x})=0$（$\boldsymbol{x}\in A$）を満たす関数 f は A 上可積分で f の A 上の積分は 0 に等しいことを示せ．

解答例（第 10 回）

問題 1　(a) I は閉区間なので可測である．また f は多項式なので I 上連続である．従って可積分条件より f は I 上可積分である．

(b) $[0,1]$ は閉区間なので可測である．また任意の $x \in [1,2]$ に対して f^x は多項式なので $[0,1]$ 上連続である．従って可積分条件より f^x は $[0,1]$ 上可積分である．

(c) (a)–(b) より $F(x) = \int_0^1 f^x \,\mathrm{d}y$ は $[1,2]$ 上可積分で $\int_I f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (\int_0^1 f^x \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$.

(d) (c) の累次積分を計算する：(i) $\int_0^1 f^x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 (x+xy)\,\mathrm{d}y = [xy + \frac{xy^2}{2}]_{y=0}^{y=1} = \frac{3x}{2}$．(ii) $\int_1^2 \frac{3x}{2}\,\mathrm{d}x = [\frac{3x^2}{4}]_{x=1}^{x=2} = \frac{9}{4}$．これより求める積分は $\frac{9}{4}$ である．

問題 2　(a) $I = [0,1]$．(b) $A^x = [0, 1-x]$.

(c) (a)–(b) より $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1],\ y \in [0, 1-x]\}$．ここで (i) 閉区間 $[0,1]$ は可測．(ii) 定数関数 $\varphi(x) = 0$ と多項式 $\psi(x) = 1-x$ は可測な $[0,1]$ 上連続なので可積分．(iii) $[0,1]$ 上 $\varphi \leq \psi$．以上より A は可測である．また f は多項式なので A 上連続である．ゆえに f は A 上可積分である．

(d) 任意の $x \in I$ に対して A^x は閉区間なので可測である．また f^x は多項式なので A^x 上連続である．従って可積分条件より f^x は A^x 上可積分である．

(e) (a)–(d) より $\int_A f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I (\int_{A^x} f^x \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\int_0^{1-x} xy \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$.

(f) (e) の累次積分を計算する：(i) $\int_0^{1-x} xy \,\mathrm{d}y = [\frac{xy^2}{2}]_{y=0}^{y=1-x} = \frac{x(1-x)^2}{2}$．(ii) $\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{24}$．これより求める積分は $\frac{1}{24}$ である．

問題 3　(a) $\int_{\substack{0\leq x\leq\pi \\ 0\leq y\leq\pi}} \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi (\int_0^\pi \cos(x+y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$．累次積分を計算する：(i) $\int_0^\pi \cos(x+y)\,\mathrm{d}y = [\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\pi} = \sin(x+\pi) - \sin x = -2\sin x$．(ii) $\int_0^\pi (-2\sin x)\,\mathrm{d}x = -4$．よって求める積分は -4.

(b) $\int_{\substack{0\leq x\leq a \\ 0\leq y\leq b}} x\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (\int_0^a x\,\mathrm{d}x)(\int_0^b \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y) = \frac{a^2(\mathrm{e}^b - 1)}{2}$.

(c) $\int_{\substack{0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 2 \\ 0\leq z\leq 3}} xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (\int_0^1 x\,\mathrm{d}x)(\int_0^2 y\,\mathrm{d}y)(\int_0^3 z\,\mathrm{d}z) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{9}{2} = \frac{9}{2}$，$\int_{\substack{0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 2 \\ 0\leq z\leq 3}} yz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (\int_0^1 1\,\mathrm{d}x)(\int_0^2 y\,\mathrm{d}y)(\int_0^3 z\,\mathrm{d}z) = 1\cdot 2\cdot\frac{9}{2} = 9$，$\int_{\substack{0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 2 \\ 0\leq z\leq 3}} z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (\int_0^1 1\,\mathrm{d}x)(\int_0^2 1\,\mathrm{d}y)(\int_0^3 z\,\mathrm{d}z) = 1\cdot 2\cdot\frac{9}{2} = 9$.
従って求める積分は $\frac{9}{2} + 9 + 9 = \frac{45}{2}$.

(d) 求める積分を I とおく．変数 x, y を入れ替えると $I = \int_{x^2+y^2+z^2\leq 100} (y-x)(x-z)(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -I$.
従って $I = 0$.

(e) $\int_{\substack{y\geq 0 \\ y^2\leq x\leq 1}} y^3\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (\int_{y^2}^1 y^3\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$．累次積分を計算する：(i) $\int_{y^2}^1 y^3\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x = [y^2\mathrm{e}^{xy}]_{x=y^2}^{x=1} = y^2\mathrm{e}^y - y^2\mathrm{e}^{y^3}$．(ii) $\int_0^1 (y^2\mathrm{e}^y - y^2\mathrm{e}^{y^3})\,\mathrm{d}y = [(y^2-2y+2)\mathrm{e}^y - \frac{\mathrm{e}^{y^3}}{3}]_{y=0}^{y=1} = \frac{2\mathrm{e}-5}{3}$.

(f) $\int_{0\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq 1} x_1x_2\cdots x_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_0^1 (\int_0^{x_n} (\cdots(\int_0^{x_2} x_1\cdots x_n\,\mathrm{d}x_1)\cdots)\,\mathrm{d}x_{n-1})\,\mathrm{d}x_n$．累次積分を計算する：(i) $\int_0^{x_2} x_1\cdots x_n\,\mathrm{d}x_1 = \frac{x_2^3x_3\cdots x_n}{2}$．(ii) $\int_0^{x_3} \frac{x_2^3x_3\cdots x_n}{2}\,\mathrm{d}x_2 = \frac{x_3^5x_4\cdots x_n}{2\cdot 4}$．(iii) $\int_0^{x_4} \frac{x_3^5x_4\cdots x_n}{2\cdot 4}\,\mathrm{d}x_3 = \frac{x_4^7x_5\cdots x_n}{2\cdot 4\cdot 6}$．……．($n$) $\int_0^1 \frac{x_n^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}\,\mathrm{d}x_n = \frac{1}{2^n n!}$.

問題 4　仮定より定数関数 $g(\boldsymbol{x}) = 1$ は A 上可積分で $\int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A 1\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mu(A)$．従って積分の線形性より関数 $f(\boldsymbol{x}) = 0\times g(\boldsymbol{x}) = 0$ も A 上可積分で $\int_A 0\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A 0\times g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\times\int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\times\int_A 1\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\times\mu(A) = 0$.