9　可積分条件，他（2019-12-05）

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\mu(A)$，$\mu^*(A)$，$\mu_*(A)$ はそれぞれ A の（ジョルダン）測度，外測度，内測度を表す．

問題 1　区間 $I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$（$a_i < b_i$）の境界 $\partial I = \{a_1, b_1\} \times [a_2, b_2] \cup [a_1, b_1] \times \{a_2, b_2\}$ を考える．

(a) $\mu^*(\partial I) = 0$ を示せ．

(b) $\mu(\partial I) = 0$ を示せ．

問題 2　$\mathbb{R}^2$ の集合 $B := \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2;\ 0 \leq x, y < 1\}$ は零集合だが（ジョルダン）可測でないことを示す．$k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $A_k := \{\frac{i-1}{k};\ i = 1, 2, \ldots, k\}$ とおく．

(a) $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_k \times A_\ell = B$ を示せ．

(b) 任意の整数 $k, \ell \geq 1$ に対して $A_k \times A_\ell$ は零集合であることを示せ．

(c) B は零集合であることを示せ．

(d) B に含まれる基本集合は空集合に限ることを示せ．ただし $\mathbb{R}^2$ の基本集合とは空集合と（左半開）区間 $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$（$a_i < b_i$）およびそれらの有限和である．

(e) $\mu_*(B) = 0$ を示せ．

(f) B を含む基本集合は区間 $I := [0, 1) \times [0, 1)$ を含むことを示せ．

(g) $\mu^*(B) = 1$ を示せ．

(h) B は可測でないことを示せ．

問題 3　条件 $x^2 + 2y^2 = \frac{57}{32}$ の下で関数 $f(x, y) = 4x + 5y$ が極大・極小になる点を探す．

(a) ラグランジュの未定乗数法に関する下記の定理 L を用いて f が集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 2y^2 = \frac{57}{32}\}$ 上極大・極小になる点の候補を求めよ．

(b) 陰関数に関する下記の定理 I を用いて (a) で求めた点で f が A 上極大・極小になるか調べよ．

定理 L　関数 $f(x, y)$ および $g(x, y)$ は開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上 C^1 級とする．$f' = (f_x, f_y)$ および $g' = (g_x, g_y)$ とおく．集合 $A = \{\boldsymbol{x} \in U;\ g(\boldsymbol{x}) = 0\}$ に関して，f は $g'(a, b) \neq (0, 0)$ を満たす点 $(a, b) \in A$ で A 上極大または極小になるとする．このとき定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $f'(a, b) = \lambda g'(a, b)$ が成り立つ．

定理 I　関数 $g(x, y)$ は開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上 C^1 級とする．g は点 $(a, b) \in U$ に対して $g(a, b) = 0$ かつ $g_y(a, b) \neq 0$ を満たすとする．このとき点 a を含む開区間 I と点 b を含む開区間 J で $I \times J \subset U$ を満たすものと C^1 級関数 $\gamma : I \to J$ が存在して次が成り立つ：

(i) $b = \gamma(a)$.

(ii) 任意の点 $(x, y) \in I \times J$ に対して $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \gamma(x)$.

(iii) 任意の点 $x \in I$ に対して $g_y(x, \gamma(x)) \neq 0$ かつ $\gamma'(x) = -\frac{g_x(x, \gamma(x))}{g_y(x, \gamma(x))}$.

解答例（第 9 回）

問題 1 (a) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，区間 $J_1 = [a_1, a_1+\varepsilon) \times [a_2, b_2+\varepsilon)$，$J_2 = [b_1, b_1+\varepsilon) \times [a_2, b_2+\varepsilon)$，$J_3 = [a_1, b_1+\varepsilon) \times [a_2, a_2+\varepsilon)$，$J_4 = [a_1, b_1+\varepsilon) \times [b_2, b_2+\varepsilon)$ の和 $J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$ は ∂A を含む基本集合．従って $0 \le \mu^*(\partial I) \le \mu(J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4) \le \mu(J_1) + \mu(J_2) + \mu(J_3) + \mu(J_4) = 2\varepsilon(b_2 - a_2 + \varepsilon) + 2\varepsilon(b_1 - a_1 + \varepsilon) = 2\varepsilon(b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + 2\varepsilon)$．これより $0 \le \mu^*(\partial I) \le 0$ すなわち $\mu^*(\partial I) = 0$ である．
(b) $0 \le \mu_*(\partial I) \le \mu^*(\partial I) = 0$ より $\mu_*(\partial I) = \mu^*(\partial I) = 0$.

問題 2 (a) 任意の整数 $k, \ell \ge 1$ に対して $A_k \times A_\ell = \{(\frac{i-1}{k}, \frac{j-1}{\ell});\ i = 1, 2, \dots, k,\ j = 1, 2, \dots, \ell\} \subset B$ より $\bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{\ell=1}^\infty A_k \times A_\ell \subset B$．任意の $(x, y) \in B$ に対して $x, y \in \mathbb{Q}$ かつ $0 \le x, y < 1$ より $x = \frac{i-1}{a}$，$y = \frac{j-1}{b}$ かつ $1 \le i \le a$，$1 \le j \le b$ を満たす正整数 a, b, i, j が存在する．このとき $x \in A_a$，$y \in A_b$ なので $(x, y) \in A_a \times A_b \subset \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{\ell=1}^\infty A_k \times A_\ell$．ゆえに $B \subset \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{\ell=1}^\infty A_k \times A_\ell$.
(b) 点 $\boldsymbol{x}_{i,j} := (\frac{i-1}{k}, \frac{j-1}{\ell})$（$i, j = 1, 2, 3, \dots$）を $\boldsymbol{x}_{1,1}, \boldsymbol{x}_{1,2}, \boldsymbol{x}_{2,1}, \boldsymbol{x}_{1,3}, \boldsymbol{x}_{2,2}, \boldsymbol{x}_{3,1}, \boldsymbol{x}_{1,4}, \dots$ の要領で 1 列に並べて点列 $\{\boldsymbol{y}_m\}_{m=1,2,3,\dots}$ をつくる．このとき閉区間 $K_m := [\boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}_m] = \{\boldsymbol{y}_m\}$ を考えると閉区間列 $\{K_m\}_{m=1,2,3,\dots}$ は $A_k \times A_\ell$ を覆う．さらに $\mu(K_m) = 0$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\sum_{m=1}^\infty \mu(K_m) = 0 \le \varepsilon$. ゆえに $A_k \times A_\ell$ は零集合である．
(c) 集合 $X_{k,\ell} := A_k \times A_\ell$（$k, \ell = 1, 2, 3, \dots$）を $X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{1,3}, X_{2,2}, X_{3,1}, X_{1,4}, \dots$ の要領で 1 列に並べて集合列 $\{Y_m\}_{m=1,2,3,\dots}$ をつくる．このとき (a) より $B = \cup_{m=1}^\infty Y_m$．また (b) より各 Y_m は零集合．零集合列の和は零集合なのでこれより B は零集合である．
(d) B は空でない基本集合を含むとする．このとき区間 $J = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$（$a_i < b_i$）が存在して $J \subset B$. 今 $a_1 < b_1$ より無理数 $x \in [a_1, b_1)$ が存在する．このとき $(x, a_2) \in J \subset B$ となり B の定義に矛盾．
(e) (d) より B に含まれる基本集合は空集合に限る．従って $\mu_*(B) = \mu(\emptyset) = 0$.
(f) 任意の有限個の区間 $J_1, \dots, J_m$ に対して和 $\bigcup_{i=1}^m J_i$ は B を含むとする．基本集合から区間を引いたものは基本集合なので $K := I \setminus \bigcup_{i=1}^m J_i$ は基本集合である．$K \neq \emptyset$ とすると区間 $L = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \subset K$（$a_i < b_i$）が存在する．今 $a_1 < b_1$ および $a_2 < b_2$ より有理数 $x \in [a_1, b_1)$，$y \in [a_2, b_2)$ が存在する．すると $L \subset K \subset I$ より $0 \le a_i < b_i < 1$ なので $(x, y) \in B$．しかし $B \subset \bigcup_{i=1}^m J_i$ と K の定義より $(x, y) \in L \subset K \subset (\bigcup_{i=1}^m J_i)^{\mathsf{c}} \subset B^{\mathsf{c}}$ となり矛盾．
(g) 区間 I は B を含むので $\mu^*(B) \le \mu(I) = 1$．一方，任意の B を含む基本集合 J に対して (f) より $J \supset I$ なので $\mu(J) \ge \mu(I) = 1$．$\mu^*(B)$ はそのような $\mu(J)$ の下限なので $\mu^*(B) \ge 1$．以上より $\mu^*(B) = 1$ である．
(h) (e) と (g) より B の内測度と外測度は一致しないので B は可測でない．

問題 3 (a) $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - \frac{57}{32}$ とおく．このとき $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x, y) = 0\}$．また f, g は開集合 $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級で $f' = (f_x, f_y) = (4, 5)$，$g' = (g_x, g_y) = (2x, 4y)$．特に g' は原点以外で $(0, 0)$ にならないので原点を含まない A 上 $(0, 0)$ にならない．従って f が点 $(a, b) \in A$ で A 上極大または極小になるとすると，定理 L より $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $f'(a, b) = \lambda g'(a, b)$．このとき

$$a^2 + 2b^2 = \frac{57}{32}, \qquad 4 = 2a\lambda, \qquad 5 = 4b\lambda$$

であり，この方程式を満たすのは $a = \pm 1$，$b = \pm\frac{5}{8}$，$\lambda = \pm 2$ のみ．（複号同順．）従って f は 2 点

$(a_+, b_+) = (1, \frac{5}{8})$ および $(a_-, b_-) = (-1, -\frac{5}{8})$ 以外では A 上極大にも極小にもならない．

(b) g は開集合 $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級で $g(a_+, b_+) = 0$ かつ $g_y(a_+, b_+) = 4b_+ = \frac{5}{2} \neq 0$．従って定理 I より点 a_+ を含む開区間 I と点 b_+ を含む開区間 J および C^1 級関数 $\gamma : I \to J$ が存在して次が成り立つ：(i) $b_+ = \gamma(a_+)$．(ii) 任意の $x \in I$ および $y \in J$ に対して $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \gamma(x)$．(iii) 任意の $x \in I$ に対して $g_y(x, \gamma(x)) = 4\gamma(x) \neq 0$ かつ $\gamma'(x) = -\frac{g_x(x,\gamma(x))}{g_y(x,\gamma(x))} = -\frac{x}{2\gamma(x)}$．$I$ 上の C^1 級関数 $\varphi(x) = f(x, \gamma(x))$ に関して (iii) より $\varphi' = f_x + f_y\gamma' = 4 - \frac{5x}{2\gamma}$．さらに (iii) より φ' は I 上 C^1 級であり $\varphi'' = -\frac{5}{2\gamma} + \frac{5x\gamma'}{2\gamma^2} = -\frac{5}{2\gamma} - \frac{5x^2}{4\gamma^3}$．今 $f'(a_+, b_+) = \lambda g'(a_+, b_+)$ を満たす λ が存在するので点 a_+ は φ の停留点．さらに (i) より $\varphi''(a_+) = -\frac{5}{2b_+} - \frac{5a_+^2}{4b_+^3} = -\frac{228}{25} < 0$．以上より φ は停留点 a_+ で真に極大になる．従って (ii) より f は点 (a_+, b_+) で A 上真に極大になる．

$g(a_-, b_-) = 0$ かつ $g_y(a_-, b_-) = 4b_- = -\frac{5}{2} \neq 0$ より点 (a_-, b_-) に対しても定理 I による同様の議論は可能．ただし $\varphi''(a_-) = -\frac{5}{2b_-} - \frac{5a_-^2}{4b_-^3} = -\frac{228}{25} > 0$ より φ は停留点 a_- で真に極小になるので f は点 (a_-, b_-) で A 上真に極小になる．