8　積分の定義（2019-11-14）

次の記法を用いてよい：

- （左半開）区間 $I \subset \mathbb{R}^n$ 上有界な関数 f および I の小区間への分割 $\Delta = \{I_1, \dots, I_m\}$ に対して

$$P_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{m} \inf_{\boldsymbol{x} \in I_i} f(\boldsymbol{x}) \times \mu(I_i), \qquad Q_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{m} \sup_{\boldsymbol{x} \in I_i} f(\boldsymbol{x}) \times \mu(I_i).$$

  ただし集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\mu(X)$ は X の（ジョルダン）測度である．
- 集合 A に対して χ_A は A の定義関数を表す．

積分に関する次の定理を証明なしで用いてよい．

定理． 関数 f, g は有界集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上有界とする．このとき：
(I) f, g が A 上可積分ならば，任意定数 $c, d \in \mathbb{R}$ に対して関数 $cf + dg$ は A 上可積分で $\int_A (cf + dg)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = c\int_A f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + d\int_A g\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.
(II) $\mu(A) = 0$ ならば f は A 上可積分で $\int_A f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

問題 1　関数 f, g は有界集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上有界とする．f, g は A 上可積分とする．このとき次の命題が成り立つことを示す：A 上 $f \leq g$ ならば $\int_A f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_A g\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ が成り立つ．
(a) A が区間のときこの命題が成り立つことを示せ．
(b) A が区間でないときこの命題が成り立つことを示せ．

問題 2　関数 f, g は有界集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上有界とする．次の命題が成り立つことを示す：f, g が A 上可積分ならば関数 fg も A 上可積分である．
(a) 関数 φ は区間 $J \subset \mathbb{R}^n$ 上有界とする．このとき $\sup_{\boldsymbol{x} \in J} \varphi(\boldsymbol{x}) - \inf_{\boldsymbol{x} \in J} \varphi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in J} |\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}')|$ が成り立つことを示せ．
(b) A が区間のとき上記の命題が成り立つことを示せ．
(c) A が区間でないとき上記の命題が成り立つことを示せ．

問題 3　関数 f は有界集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 上有界とする．f は A, B 上可積分で $\mu(A \cap B) = 0$ とする．
(a) I を $A \cup B$ を含む区間とする．このとき I 上 $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$ が成り立つことを示せ．
(b) f は $A \cup B$ 上可積分で $\int_{A \cup B} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_B f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ が成り立つことを示せ．

解答例（第 8 回）

問題 1　(a) 区間 A 上 $f \leq g$ とする．このとき任意の A の分割 Δ に対して $P_{g-f}(\Delta) \geq 0$ より $\underline{\int}_A (g-f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq 0$．さらに仮定と定理 (I) より $g-f$ は A 上可積分で $\int_A g\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_A f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A (g-f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \underline{\int}_A (g-f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq 0$.
(b) 区間でない A 上 $f \leq g$ とする．I を A を含む区間とする．仮定より $f\chi_A, g\chi_A$ は I 上可積分かつ $g\chi_A - f\chi_A = (g-f)\chi_A \geq 0$．従って (a) より $\int_A f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_I f\chi_A\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_I g\chi_A\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A g\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

問題 2　(a) $\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in J} |\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}')| = \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in J}\{\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}')\} = \sup_{\boldsymbol{x}\in J}\varphi(\boldsymbol{x}) + \sup_{\boldsymbol{x}'\in J}\{-\varphi(\boldsymbol{x}')\} = \sup_{\boldsymbol{x}\in J}\varphi(\boldsymbol{x}) - \inf_{\boldsymbol{x}'\in J}\varphi(\boldsymbol{x}')$.
(b) A を区間とする．$C := \sup_{\boldsymbol{x}\in A}|f(\boldsymbol{x})|$，$D := \sup_{\boldsymbol{x}\in A}|g(\boldsymbol{x})|$ とおく．任意の A の分割 $\Delta = \{I_1, \ldots, I_m\}$ に対して $a_i := \sup_{\boldsymbol{x}\in I_i} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) - \inf_{\boldsymbol{x}\in I_i} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$ とおくと $Q_{fg}(\Delta) - P_{fg}(\Delta) = \sum_{i=1}^m a_i\mu(I_i)$．ここで (a) より $a_i = \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in I_i}|f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{x}')|$．さらに任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対して $|f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{x}')| \leq |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')||g(\boldsymbol{x}')| + |f(\boldsymbol{x})||g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}')| \leq D|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')| + C|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}')|$ より $a_i \leq \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in I_i}\{D|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')| + C|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}')|\} \leq D\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in I_i}|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')| + C\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in I_i}|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}')|\}$．再び (a) より $a_i \leq D\{\sup_{\boldsymbol{x}\in I_i} f(\boldsymbol{x}) - \inf_{\boldsymbol{x}\in I_i} f(\boldsymbol{x})\} + C\{\sup_{\boldsymbol{x}\in I_i} g(\boldsymbol{x}) - \inf_{\boldsymbol{x}\in I_i} g(\boldsymbol{x})\}$．ゆえに $Q_{fg}(\Delta) - P_{fg}(\Delta) \leq \sum_{i=1}^m [D\{\sup_{\boldsymbol{x}\in I_i} f(\boldsymbol{x}) - \inf_{\boldsymbol{x}\in I_i} f(\boldsymbol{x})\} + C\{\sup_{\boldsymbol{x}\in I_i} g(\boldsymbol{x}) - \inf_{\boldsymbol{x}\in I_i} g(\boldsymbol{x})\}] \times \mu(I_i) = D\{Q_f(\Delta) - P_f(\Delta)\} + C\{Q_g(\Delta) - P_g(\Delta)\}$．これより $0 \leq \overline{\int_A} fg\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \underline{\int_A} fg\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq D(\overline{\int_A} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \underline{\int_A} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}) + C(\overline{\int_A} g\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \underline{\int_A} g\,\mathrm{d}\boldsymbol{x})$．$f, g$ が A 上可積分ならば，この不等式の最右辺は 0 なので中辺も 0 すなわち fg は A 上可積分である．
(c) I を A を含む区間とする．f, g が A 上可積分ならば $f\chi_A$ と $g\chi_A$ は I 上可積分である．さらに (b) より $(f\chi_A)(g\chi_A) = (fg)\chi_A$ も I 上可積分である．

問題 3　(a) $I = (A\cap B)\cup(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup\{I\setminus(A\cup B)\}$ および (i) $A\cap B$ 上 $\chi_{A\cup B} = \chi_{A\cap B} = \chi_A = \chi_B = 1$ より $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$，(ii) $A\setminus B$ 上 $\chi_{A\cup B} = \chi_A = 1$，$\chi_{A\cap B} = \chi_B = 0$ より同，(iii) $B\setminus A$ 上 $\chi_{A\cup B} = \chi_B = 1$，$\chi_{A\cap B} = \chi_A = 0$ より同，(iv) $I\setminus(A\cup B)$ 上 $\chi_{A\cup B} = \chi_{A\cap B} = \chi_A = \chi_B = 0$ より同．従って I 上 $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$ が成り立つ．
(b) 仮定より $f\chi_A, f\chi_B$ は I 上可積分．また仮定と定理 (II) より $f\chi_{A\cap B}$ は I 上可積分で $\int_I f\chi_{A\cap B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{A\cap B} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$．従って (a) と定理 (I) より $f\chi_{A\cup B} = f\chi_A + f\chi_B - f\chi_{A\cap B}$ は I 上可積分で $\int_{A\cup B} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_I f\chi_{A\cup B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_I f\chi_A\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_I f\chi_B\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_I f\chi_{A\cap B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_B f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.