7　条件付き極値問題（2019-11-07）

ラグランジュの未定乗数法に関する次の定理を証明なしで用いてよい：

定理. $\mathbb{R}$ に値をとる関数 f と $\mathbb{R}^m$ に値をとる関数 $G = (g_1, \dots, g_m)$ は開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上 C^1 級とする．ただし $m \leq n$．f は点 $\boldsymbol{a} \in A := \{\boldsymbol{x} \in U;\ G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ で A 上極大または極小になるとする．また G のヤコビ行列 $G' = (\frac{\partial g_i}{\partial x_j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ は点 $\boldsymbol{a}$ で行フルランクとする：$\operatorname{rank} G'(\boldsymbol{a}) = m$．このとき（ラグランジュ乗数）$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ が存在して $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\lambda} G'(\boldsymbol{a})$ すなわち $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ （$j = 1, \dots, n$）が成り立つ．ただし $f' = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$.

問題 1　条件 $x^2 - y^2 = 1$ の下で関数 $f(x, y) = x + \alpha y$（$|\alpha| < 1$）が極大・極小になる点を探す．
(a) 上記の定理を用いて f が $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = 1\}$ 上極大・極小になる点の候補を求めよ．
(b) 陰関数定理を用いて (a) で求めた点で f が A 上極大・極小になるか調べよ．

問題 2　条件 $x + y + z = 1$ かつ $xy = z^2$ の下で関数 $f(x, y, z) = x$ が極大・極小になる点を探す．
(a) 上記の定理を用いて f が $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 1,\ xy = z^2\}$ 上極大・極小になる点の候補を求めよ．
(b) 陰関数定理を用いて (a) で求めた点で f が A 上極大・極小になるか調べよ．

問題 3　第 1 象限内の四半楕円 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0,\ \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1\}$ 上を動く点 P を考える．ただし $p > 0$，$q > 0$．原点と点 P を結ぶ線分を対角線とする長方形の周長を L，面積を S とおく．
(a) L は点 $\mathrm{P}(a, b)$ で最大になるとする．上記の定理を用いて (a, b) を求めよ．またそのときの L を求めよ．
(b) S は点 $\mathrm{P}(a, b)$ で最大になるとする．上記の定理を用いて (a, b) を求めよ．またそのときの S を求めよ．

問題 4　対称行列 $A \in \mathbb{R}^n$ に対して斉 2 次関数

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} A \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

を考える．ただし $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\mathsf{T}$ である．
(a) 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$（$k = 1, \dots, n$）を求めよ．
(b) （$n - 1$ 次元）球面 $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ を考える．f は点 $\boldsymbol{v} \in S$ で S 上極大または極小になるとする．このとき $\boldsymbol{v}$ は A の固有ベクトルであることを上記の定理を用いて示せ．

解答例（第 7 回）

問題 1　(a) f は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級で $f'=(f_x,f_y)=(1,\alpha)$．$g(x,y)=x^2-y^2-1$ とおく．このとき $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ g(x,y)=0\}$．また g は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級でヤコビ行列 $g'=(g_x,g_y)=(2x,-2y)$ は A 上行フルランク．（実際ランクが落ちるのは原点のみで A は原点を含まない．）従って f が点 $(a,b)\in A$ で A 上極大または極小になるとすると，定理より $f_x(a,b)=\lambda g_x(a,b)$ かつ $f_y(a,b)=\lambda g_y(a,b)$ を満たす λ が存在する．このとき

$$a^2-b^2=1,\qquad 1=2a\lambda,\qquad \alpha=-2b\lambda.$$

第 2,3 式より（$\lambda\neq 0$ かつ）$a=\frac{1}{2\lambda}$，$b=-\frac{\alpha}{2\lambda}$．これを第 1 式に代入して $\frac{1-\alpha^2}{4\lambda^2}=1$ すなわち $\lambda=\pm\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$．従って $a=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, $b=\mp\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$．（複号同順．以下同．）以上より 2 点 $(a_\pm,b_\pm)=(\pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}},\mp\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}})\in A$ 以外では f は A 上極大・極小にならない．
(b) g は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級であり $g_x(a_+,b_+)=2a_+=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\neq 0$．従って陰関数定理より点 b_+ を含む開区間 I と点 a_+ を含む開区間 J および C^1 級関数 $\gamma:I\to J$ が存在して次が成り立つ：(i) $a_+=\gamma(b_+)$．(ii) 任意の $y\in I$，$x\in J$ に対して $g(x,y)=0\Leftrightarrow x=\gamma(y)$．(iii) 任意の $y\in I$ に対して $g_x(\gamma(y),y)=2\gamma(y)\neq 0$ かつ $\gamma'(y)=-\frac{g_y(\gamma(y),y)}{g_x(\gamma(y),y)}=\frac{y}{\gamma(y)}$．(ii) より f が点 (a_+,b_+) で A 上極大（極小）になることは，I 上の関数 $\varphi(y)=f(\gamma(y),y)$ が点 b_+ で極大（極小）になることと同値．φ は I 上 C^1 級で (iii) より $\varphi'=f_x\gamma'+f_y=\frac{y}{\gamma}+\alpha$．特に $f'(a_+,b_+)=\lambda g'(a_+,b_+)$ を満たす λ が存在するので $\varphi'(b_+)=0$．さらに (iii) より φ' は I 上 C^1 級で $\varphi''=\frac{1}{\gamma}-\frac{y\gamma'}{\gamma^2}=\frac{1}{\gamma}-\frac{y^2}{\gamma^3}$．特に (i) より $\varphi''(b_+)=\frac{1}{a_+}-\frac{b_+^2}{a_+^3}=(1-\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}>0$．以上より φ は停留点 b_+ で真に極小．ゆえに f は点 $(a_+,b_+)=(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}},-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}})$ で A 上真に極小になる．

　点 (a_-,b_-) に関しても $g_z(a_-,b_-)=2a_-=-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\neq 0$ より陰関数定理による同様の議論が可能．ただしこの場合 $\varphi''(b_-)=-(1-\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}<0$ となるので f は点 $(a_-,b_-)=(-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}},\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}})$ で A 上真に極大になる．

問題 2　(a) f は $\mathbb{R}^3$ 上 C^1 級．$g_1(x,y,z)=x+y+z-1$，$g_2(x,y,z)=xy-z^2$ とおく．このとき $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ G(x,y,z)=\mathbf{0}\}$．また関数 $G=(g_1,g_2)$ は $\mathbb{R}^3$ 上 C^1 級でヤコビ行列

$$G'=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ y & x & -2z\end{pmatrix}\tag{*}$$

は A 上行フルランク．（実際 G' のランクが落ちるのは $x=y=-2z$ のときのみで，このとき $g_1=g_2=0$ は満たされない．）従って f が点 $(a,b,c)\in A$ で極大または極小になるとすると，定理より $f'(a,b,c)=(\lambda_1,\lambda_2)g'(a,b,c)$ を満たす λ_1,λ_2 が存在する．このとき $f_x=1$，$f_y=f_z=0$ および (*) より

$$a+b+c=1,\qquad ab=c^2,$$
$$1=\lambda_1+b\lambda_2,\qquad 0=\lambda_1+a\lambda_2,\qquad 0=\lambda_1-2c\lambda_2.$$

第 4,5 式から λ_1 を消去すると $(a+2c)\lambda_2=0$．ここで $\lambda_2=0$ とすると第 4,5 式より $\lambda_1=0$ であり，さらに第 3 式より $0=1$ となるので不適．従って $a=-2c$．これを第 2 式に代入すると $-2bc=c^2$．(I) $c=0$ のとき：$a=-2c=0$．$a=c=0$ を第 1 式に代入すると $b=1$．このとき $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$ とすると第 3,4,5 式は満たされる．(II) $c\neq 0$ かつ $b=-\frac{c}{2}$ のとき：第 1 式に $a=-2c$, $b=-\frac{c}{2}$ を代入すると $c=-\frac{2}{3}$．これより $a=\frac{4}{3}$,

$b=\frac{1}{3}$．このとき $\lambda_1=\frac{4}{3}$，$\lambda_2=-1$ とすると第 3,4,5 式は満たされる．以上より $(a_1,b_1,c_1)=(0,1,0)$，$(a_2,b_2,c_2)=(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ の 2 点以外で f は A 上極大・極小にならない．
(b) G は $\mathbb{R}^3$ 上 C^1 級で

$$G_{x,y}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial x}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & x\end{pmatrix},\qquad G_z=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial z}\\ \frac{\partial g_2}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2z\end{pmatrix}.$$

$G_{x,y}(a_1,b_1,c_1)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ b_1 & a_1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ は正則．従って陰関数定理より点 c_1 を含む開区間 I と点 (a_1,b_1) を含む領域 $J\subset\mathbb{R}^2$ および C^1 級関数 $\Gamma:I\to J$ が存在して次が成り立つ：$\Gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$ とおくとき (i) $(a_1,b_1)=\Gamma(c_1)$ すなわち $a_1=\gamma_1(c_1)$ かつ $b_1=\gamma_2(c_1)$．(ii) 任意の $z\in I$, $(x,y)\in J$ に対して $G(x,y,z)=0$ $\Leftrightarrow (x,y)=\Gamma(z)\Leftrightarrow x=\gamma_1(z)$ かつ $y=\gamma_2(z)$．(iii) 任意の $z\in I$ に対して $G_{x,y}(\gamma_1(z),\gamma_2(z),z)$ は正則（すなわち $\det G_{x,y}(\gamma_1(z),\gamma_2(z),z)=\gamma_1(z)-\gamma_2(z)\neq 0$）で

$$\begin{aligned}\Gamma'(z)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(z)\\ \gamma_2'(z)\end{pmatrix}&=-G_{x,y}^{-1}(\gamma_1(z),\gamma_2(z),z)G_z(\gamma_1(z),\gamma_2(z),z)\\ &=-\frac{1}{x-y}\begin{pmatrix}x & -1\\ -y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2z\end{pmatrix}=-\frac{1}{x-y}\begin{pmatrix}x+2z\\ -y-2z\end{pmatrix}\qquad (x=\gamma_1(z),\ y=\gamma_2(z)).\end{aligned}$$

(ii) より f が点 (a_1,b_1,c_1) で極大（極小）になることは，I 上の関数 $\varphi(z)=f(\gamma_1(z),\gamma_2(z),z)$ が点 c_1 で極大（極小）になることと同値．φ は I 上 C^1 級で (iii) より $\varphi'=f_x\gamma_1'+f_y\gamma_2'+f_z=-\frac{\gamma_1+2z}{\gamma_1-\gamma_2}$．特に $f'(a_1,b_1,c_1)=(\lambda_1,\lambda_2)G'(a_1,b_1,c_1)$ を満たす λ_1,λ_2 が存在するので $\varphi'(c_1)=0$．さらに (iii) より φ' は I 上 C^1 級で $\varphi''=-\frac{\gamma_1'+2}{\gamma_1-\gamma_2}+\frac{(\gamma_1+2z)(\gamma_1'-\gamma_2')}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}=-\frac{\gamma_1-2\gamma_2-2z}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}-\frac{(\gamma_1+2z)(\gamma_1+\gamma_2+4z)}{(\gamma_1-\gamma_2)^3}$．特に (i) より $\varphi''(c_1)=-\frac{a_1-2b_1-2c_1}{(a_1-b_1)^2}-\frac{(a_1+2c_1)(a_1+b_1+4c_1)}{(a_1-b_1)^3}=2>0$．以上より φ は停留点 c_1 で真に極小．ゆえに f は点 $(a_1,b_1,c_1)=(0,1,0)$ で A 上真に極小になる．

点 (a_2,b_2,c_2) に関しても $G_{x,y}(a_2,b_2,c_2)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ b_2 & a_2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{smallmatrix}\right)$ は正則なので陰関数定理による同様の議論が可能．ただしこの場合 $\varphi''(c_2)=-\frac{a_2-2b_2-2c_2}{(a_2-b_2)^2}-\frac{(a_2+2c_2)(a_2+b_2+4c_2)}{(a_2-b_2)^3}=-2<0$ となるので f は点 $(a_2,b_2,c_2)=(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ で真に極大になる．

問題 3　(a) 関数 $f(x,y)=x+y$，$g(x,y)=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-1$ を考える．このとき $A=\{(x,y)\in U;\ g(x,y)=0\}$ であり f は点 $(a,b)\in A$ で A 上最大になる．ただし $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x,y>0\}$．$f,g$ は U 上 C^1 級で $g'=(g_x,g_y)=(\frac{2x}{p^2},\frac{2y}{q^2})$ は A 上行フルランク．（実際 $g'=(0,0)$ となるのは $\mathbb{R}^2$ 上原点のみ．）従って定理より $f_x(a,b)=\lambda g_x(a,b)$ かつ $f_y(a,b)=\lambda g_y(a,b)$ を満たす λ が存在する．このとき $f_x=f_y=1$ より $a>0$，$b>0$ かつ $\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}=1$，$\frac{2a\lambda}{p^2}=\frac{2b\lambda}{q^2}=1$．これを満たすのは $a=\frac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}}$，$b=\frac{q^2}{\sqrt{p^2+q^2}}$，$\lambda=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2}$ のみなので $(a,b)=(\frac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}},\frac{q^2}{\sqrt{p^2+q^2}})$．またこのとき $L=2f(a,b)=2(a+b)=2\sqrt{p^2+q^2}$．
(b) 関数 $f(x,y)=xy$，$g(x,y)=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-1$ を考える．このとき (a) と同様にして，定理より $f_x(a,b)=\lambda g_x(a,b)$ かつ $f_y(a,b)=\lambda g_y(a,b)$ を満たす λ が存在する．このとき $f_x=y$，$f_y=x$ より $a>0$，$b>0$ かつ $\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}=1$，$b=\frac{2a\lambda}{p^2}$，$a=\frac{2b\lambda}{q^2}$．これを満たすのは $a=\frac{p}{\sqrt{2}}$，$b=\frac{q}{\sqrt{2}}$，$\lambda=\frac{pq}{2}$ のみなので $(a,b)=(\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}})$．

またこのとき $S=f(a,b)=ab=\frac{pq}{2}$.

問題 4　(a)

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j)=\begin{cases}2x_k & (i=j=k)\\ x_j & (i=k,\ j\neq k)\\ x_i & (i\neq k,\ j=k)\\ 0 & (i\neq k,\ j\neq k)\end{cases}$$

より $\frac{\partial f}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j)=2a_{k,k}x_k+\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}} a_{k,j}x_j+\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq k}} a_{i,k}x_i=2a_{k,k}x_k+\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}(a_{k,j}+a_{j,k})x_j$. さらに $a_{j,k}=a_{k,j}$ より $\frac{\partial f}{\partial x_k}=2a_{k,k}x_k+2\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}} a_{k,j}x_j=2\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j$.

(b) 関数 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^n x_j^2$ を考える. このとき $S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n;\ g(\boldsymbol{x})=0\}$. f,g は $\mathbb{R}^n$ 上 C^1 級で $g'=(\frac{\partial g}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial g}{\partial x_n})=(2x_1,\ldots,2x_n)$ は S 上行フルランク.（実際 $g'=(0,\ldots,0)$ となるのは $\mathbb{R}^n$ 上原点のみで S は原点を含まない.）従って定理より $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{v})=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_k}(\boldsymbol{v})$ （$k=1,\ldots,n$）を満たす（k に依らない）λ が存在する. このとき $\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)^{\mathsf{T}}$ とおくと $\sum_{j=1}^n a_{k,j}v_j=\lambda x_k$（$k=1,\ldots,n$）すなわち $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$. また $\boldsymbol{v}\in S$ より $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$. ゆえに $\boldsymbol{v}$ は A の（固有値 λ に対する）固有ベクトルである.