6　極値（2019-10-31）

問題 1　関数 $f(x,y)=\exp(x^2+y^2)$ を考える．

(a) f の停留点を求めよ．

(b) f のヘッセ行列を求めよ．

(c) f は各停留点で極大・極小になるか調べよ．

問題 2　関数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz-2yz-xyz$ を考える．

(a) f の停留点を求めよ．

(b) f のヘッセ行列を求めよ．

(c) f は各停留点で極大・極小になるか調べよ．

問題 3　関数 $f(x,y)=\cos x+\cos(x-y)$ を考える．

(a) f の停留点を求めよ．

(b) f のヘッセ行列を求めよ．

(c) f は各停留点で極大・極小になるか調べよ．

問題 4　関数 $f(x,y,z)$ は点 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ で極大になるとする．このとき関数 $\varphi(x):=f(x,b,c)$ は点 a で極大になることを示せ．

問題 5　任意の対称行列 $A=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ に対して次の 2 つは同値であることを示す．

(i) 任意の非零ベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}A\boldsymbol{v}>0$.

(ii) A の首座小行列式はすべて正：$\det A(k)>0$（$k=1,\dots,n$）

ただし行列 X から最初の k 行 k 列以外を除いて得られる小行列を $X(k)$ と表す．

(a) A の固有値を重複も込めて $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ とおく．このとき $\det A=\lambda_1\cdots\lambda_n$ が成り立つことを示せ．

(b) 実は (i) は A の固有値がすべて正であることと同値である．これと (a) を用いて (i) $\Rightarrow$ (ii) を示せ．

(c) $a_{1,1}\neq 0$ のとき，対角成分がすべて 1 の上三角行列 R，および対称行列 $A'\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ が存在して

$$R^{\mathsf{T}}AR=\begin{pmatrix}a_{1,1} & O\\ O & A'\end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

(d) さらにこのとき $\det A(k+1)=a_{1,1}\det A'(k)$（$k=1,\dots,n-1$）が成り立つことを示せ．

(e) (c)–(d) を用いて (ii) $\Rightarrow$ (i) を $n=1,2,3,\dots$ に関する帰納法で示せ．

解答例（第 6 回）

問題 1 (a) $f_x = 2x\exp(x^2+y^2)$，$f_y = 2y\exp(x^2+y^2)$ より $f_x = f_y = 0$ を満たす f の停留点は $(x,y) = (0,0)$ のみ．
(b) $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \exp(x^2+y^2)\begin{pmatrix} (4x^2+2) & 4xy \\ 4xy & (4y^2+2) \end{pmatrix}$.
(c) 停留点 $(0,0)$ でのヘッセ行列 $H_f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値は 2 のみですべて正．従って f は停留点 $(0,0)$ で真に極小になる．

問題 2 (a) $f_x = 2x+2y+2z-yz$，$f_y = 2x+2y-2z-xz$，$f_z = 2x-2y+2z-xy$ に関して方程式 $f_x = f_y = f_z = 0$ を解く．この方程式は次と同値：$f_x - f_y = z(4+x-y) = 0$ かつ $f_x - f_z = y(4+x-z) = 0$ かつ $f_y + f_z = x(4-y-z) = 0$．最初の式より $z = 0$ または $y = 4+x$．(i) $z = 0$ のとき残りの式より $y(4+x) = x(4-y) = 0$．これより $x = y = 0$ または $x = -4$，$y = 4$．(ii) $y = 4+x$ のとき残りの式より $(4+x)(4+x-z) = x(x+z) = 0$．これより $x = 0$，$z = 4$ または $x = -4$，$z = 4$ または $x = -2$，$z = 2$．以上より $f_x = f_y = f_z = 0$ は $(x,y,z) = (0,0,0)$，$(-4,4,0)$，$(0,4,4)$，$(-4,0,4)$，$(-2,2,2)$ 以外に解を持たない．さらにこの 5 点はいずれも $f_x = f_y = f_z = 0$ の解なので f はこの 5 点のみを停留点として持つ．
(b) $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2-z & 2-y \\ 2-z & 2 & -2-x \\ 2-y & -2-x & 2 \end{pmatrix}$.
(c) (i) 停留点 $(0,0,0)$ でのヘッセ行列 $H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を（重複も込めて）$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とおくとき $\lambda_i \in \mathbb{R}$（$i = 1,2,3$）かつ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det H_f(0,0) = -32 < 0$ かつ $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \operatorname{tr} H_f(0,0,0) = 8 > 0$ より $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は 2 つが正で 1 つが負．これよりヘッセ行列は正負の固有値を持つので停留点 $(0,0,0)$ は f の鞍点である．同様に停留点 $(x,y,z) = (-4,4,0)$，$(0,4,4)$，$(-4,0,4)$ はいずれも $\det H_f = -32 > 0$ かつ $\operatorname{tr} H_f = 8 > 0$ を満たすので f の鞍点である．(ii) 停留点 $(-2,2,2)$ での f のヘッセ行列 $H_f(-2,2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は 2 のみ．特に $H_f(-2,2,2)$ は正の固有値のみ持つので停留点 $(-2,2,2)$ で f は真に極小になる．

問題 3 (a) $f_x = -\sin x - \sin(x-y)$，$f_y = \sin(x-y)$．これより $f_x = f_y = 0$ を満たす f の停留点は $\sin x = \sin(x-y) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin y = 0$ を満たす点 $(x,y) = (m\pi, n\pi)$（$m,n \in \mathbb{Z}$）である．
(b) $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x-y) & \cos(x-y) \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \end{pmatrix}$.
(c) 停留点 $(m\pi, n\pi)$（$m,n \in \mathbb{Z}$）でのヘッセ行列は
$H_f(m\pi, n\pi) = \begin{pmatrix} (-1)^{m+1}+(-1)^{m+n+1} & (-1)^{m+n} \\ (-1)^{m+n} & (-1)^{m+n+1} \end{pmatrix}$．この首座小行列式を次数は小さい順に A_1, A_2 とおくとき $A_1 = (-1)^{m+1} + (-1)^{m+n+1}$，$A_2 = (-1)^n$．従って停留点 $(m\pi, n\pi)$ は (i) n が奇数のとき，$\det H_f(m\pi, n\pi) = A_2 = -1 < 0$ よりヘッセ行列 $H_f(m\pi, n\pi)$ は正負の固有値を持つので鞍点．(ii) m,n が偶数のとき，$A_1 = (-1)+(-1) = -2 < 0$，$A_2 = 1 > 0$ よりヘッセ行列 $H_f(m\pi, n\pi)$ の固有値はすべて負なので真の極大点．(iii) m が奇数，n が偶数のとき，$A_1 = 1+1 = 2 > 0$，$A_2 = 1 > 0$ よりヘッセ行列 $H_f(m\pi, n\pi)$ の固有値はすべて正なので真の極小点．

問題 4 f は点 (a,b,c) で極大になるので次を満たす $\delta > 0$ が存在する：$\|(x,y,z)-(a,b,c)\| < \delta$ ならば $f(x,y,z) \le f(a,b,c)$．この δ に関して $|x-a| < \delta$ ならば $\|(x,b,c)-(a,b,c)\| = \|(x-a,0,0)\| = |x-a| < \delta$ より $\varphi(x) = f(x,b,c) \le f(a,b,c) = \varphi(a)$．これより φ は点 a で極大になる．

問題 5 (a) 固有値は固有多項式の根なので $\det(zI - A) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$．特に $z = 0$ のとき

左辺は $\det(-A) = (-1)^n \det A$，右辺は $(-\lambda_1)\cdots(-\lambda_n) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$ にそれぞれ等しい．従って $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ が成り立つ．

(b) $1 \le k \le n$ のとき，任意の非零な $\boldsymbol{v}' \in \mathbb{R}^k$ に対して（非零な）$\boldsymbol{v} := \left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{v}' \\ \boldsymbol{0} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^n$ を考えると，(i) より $(\boldsymbol{v}')^\top A(k)\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v} > 0$．これより $A(k)$ の固有値はすべて正である．さらに (a) よりその積である $\det A(k)$ も正である．

(c) A の第 1 行のスカラー倍を他の行に加える，および A の第 1 列のスカラー倍を他の列に加えるという基本変形により A の第 1 行と第 1 列の第 $(1,1)$ 成分以外を消去する．すなわち三角行列

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & 1 & & & \\ -\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & -\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} & \cdots & -\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を左右から A に掛けて $LAR = \left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & O \\ O & A' \end{smallmatrix}\right)$．ここで $a_{j,1} = a_{1,j}$ より $L = R^\top$ が成り立ち，従って $LAR = R^\top AR$ は対称なので A' も対称である．

(d) $X = R^\top AR$ とおくとき R は上三角なので $X(k{+}1) = R(k{+}1)^\top A(k{+}1)R(k{+}1)$．特に $\det R(k{+}1) = 1$ より $\det X(k+1) = \det A(k+1)$．一方 $X = \left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & O \\ O & A' \end{smallmatrix}\right)$ でもあるので $X(k+1) = \left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & O \\ O & A'(k) \end{smallmatrix}\right)$ より $\det X(k+1) = a_{1,1} \det A'(k)$．以上より $\det A(k+1) = \det X(k+1) = a_{1,1} \det A'(k)$．

(e) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に関する帰納法で示す．まず $n = 1$ のとき (ii) を仮定する：$\det A(1) = a_{1,1} > 0$．このとき任意の非零な $\boldsymbol{v} = (v_1) \in \mathbb{R}^1$ に対して，$v_1 \neq 0$ より $\boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v} = a_{1,1}v_1^2 > 0$．次に $n \geq 2$ のとき (ii) を仮定する：$\det A(k) > 0$（$k = 1, \ldots, n$）．このとき $a_{1,1} = A(1) \neq 0$ より (c)–(d) のような上三角行列 R と対称行列 $A' \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ が存在する．特に $\det R = 1 \neq 0$ より R は正則．そこで任意の非零な $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{u} = R^{-1}\boldsymbol{v}$ とおくと $\boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v} = (R^{-1}\boldsymbol{v})^\top(R^\top AR)(R^{-1}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^\top \left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & O \\ O & A' \end{smallmatrix}\right) \boldsymbol{u} = a_{1,1}u_1^2 + (\boldsymbol{u}')^\top A'\boldsymbol{u}'$．ただし $\boldsymbol{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ \boldsymbol{u}' \end{smallmatrix}\right)$（$\boldsymbol{u}' \in \mathbb{R}^{n-1}$）．ここで仮定 (ii) と (d) より $\det A'(k) = \frac{\det A(k+1)}{a_{1,1}} = \frac{\det A(k+1)}{\det A(1)} > 0$（$k = 1, \ldots, n-1$）すなわち A' の首座小行列式はすべて正である．従って帰納法の仮定より $\boldsymbol{u}'$ が非零ならば $(\boldsymbol{u}')^\top A'\boldsymbol{u}' > 0$．今 $\boldsymbol{v}$ は非零なので $\boldsymbol{u} = R^{-1}\boldsymbol{v}$ は非零．特に u_1 と $\boldsymbol{u}'$ は同時に零にならないので $a_{1,1} = A(1) > 0$ より $\boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v} = a_{1,1}u_1^2 + (\boldsymbol{u}')^\top A'\boldsymbol{u}' > 0$ が成り立つ．