5　テイラー展開（2019-10-24）

問題 1　次の関数 f の 1 階，2 階，3 階偏導関数をすべて求めよ．

(a)　$f(x,y)=(x^2+y^2)\exp(x^2+y^2)$　　　(b)　$f(x,y)=\log(x-y)$

(c)　$f(x,y,z)=1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz$

問題 2　関数 $f(x,y)=\sin(x+2y)$ を考える．

(a) $\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}$（$i,j=0,1,2,\ldots$）を求めよ．

(b)（多変数関数に対する）テイラーの公式を用いて f の原点 $(0,0)$ でのテイラー展開を求めよ．

(c) 同じく f の点 $(\frac{\pi}{2},0)$ でのテイラー展開を求めよ．

問題 3　指数関数のマクローリン展開 $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$（$x\in\mathbb{R}$）を用いて，関数 $f(x,y,z)=\exp(\alpha x+\beta y+\gamma z)$ の原点 $(0,0,0)$ でのテイラー展開を $f(x,y,z)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{i+j+k=\ell}c_{i,j,k}x^iy^jz^k$ の形で求めよ．ただし右辺第 2 の和は ℓ の分解 (i,j,k) のすべてにわたる和である．

問題 4　n 項係数 $\binom{k}{i_1,\ldots,i_n}=\frac{k!}{i_1!\cdots i_n!}$（$k=i_1+\cdots+i_n\geq 0$，$i_1,\ldots,i_n\geq 0$）は関係式

$$\binom{k}{i_1,\ldots,i_n}=\sum_{j=1}^{n}\binom{k-1}{i_1,\ldots,i_j-1,\ldots,i_n}$$

（$k=i_1+\cdots+i_n\geq 1$，$i_1,\ldots,i_n\geq 0$）を満たすことを示せ．ただし $i_1,\ldots,i_n$ のどれか 1 つでも負のとき $\binom{k-1}{i_1,\ldots,i_n}=0$ である．

問題 5　この問題では $\mathbb{R}^n$ の点を列ベクトルで表す．関数 $f(\boldsymbol{x})$（$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^\mathsf{T}$）は，相異なる 2 点 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)^\mathsf{T}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^\mathsf{T}$ を端点とする線分 $I=\{(1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{x};\ 0\leq t\leq 1\}$ を含む領域上 C^2 級とする．

(a) 任意の $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n)^\mathsf{T}$ および $\boldsymbol{c}\in I$ に対して

$$\sum_{i_1+\cdots+i_n=2}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{c})b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^\mathsf{T}H(\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$$

が成り立つことを示せ．ただし左辺は 2 の分解 $(i_1,\ldots,i_n)$ のすべてにわたる和であり，右辺の H は次で定義される行列である：

$$H(\boldsymbol{x}):=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right)_{i,j=1,\ldots,n}=\begin{pmatrix}f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x})\\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\boldsymbol{x})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_nx_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}.$$

(b) 点 $\boldsymbol{\xi}\in I\setminus\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\}$ が存在して

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})+G(\boldsymbol{a})^\mathsf{T}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\mathsf{T}H(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

が成り立つことをテイラーの公式を用いて示せ．ただし $G(\boldsymbol{x})=(f_{x_1}(\boldsymbol{x}),\ldots,f_{x_n}(\boldsymbol{x}))^\mathsf{T}$ である．

解答例（第 5 回）

問題 1　(a) 1 階：$f_x = (2x+2x^3+2xy^2)\exp(x^2+y^2)$，$f_y = (2y+2y^3+2x^2y)\exp(x^2+y^2)$．2 階：$f_{xx} = (2+10x^2+2y^2+4x^4+4x^2y^2)\exp(x^2+y^2)$，$f_{xy} = (8xy+4x^3y+4xy^3)\exp(x^2+y^2)$，$f_{yy} = (2+2x^2+10y^2+4x^2y^2+4y^4)\exp(x^2+y^2)$．3 階：$f_{xxx} = (24x+36x^3+12xy^2+8x^5+8x^3y^2)\exp(x^2+y^2)$，$f_{xxy} = (8y+28x^2y+4y^3+8x^4y+8x^2y^3)\exp(x^2+y^2)$，$f_{xyy} = (8x+4x^3+28xy^2+8x^3y^2+8xy^4)\exp(x^2+y^2)$，$f_{yyy} = (24y+12x^2y+36y^3+8x^2y^3+8y^5)\exp(x^2+y^2)$．
(b) 1 階：$f_x = \frac{1}{x-y}$，$f_y = -\frac{1}{x-y}$．2 階：$f_{xx} = f_{yy} = -\frac{1}{(x-y)^2}$，$f_{xy} = \frac{1}{(x-y)^2}$．3 階：$f_{xxx} = f_{xyy} = \frac{2}{(x-y)^3}$，$f_{xxy} = f_{yyy} = -\frac{2}{(x-y)^3}$．
(c) 1 階：$f_x = 1+y+z+yz$，$f_y = 1+x+z+xz$，$f_z = 1+x+y+xy$．2 階：$f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 0$，$f_{xy} = 1+z$，$f_{xz} = 1+y$，$f_{yz} = 1+x$．3 階：$f_{xxx} = f_{yyy} = f_{zzz} = f_{xxy} = f_{xyy} = f_{xxz} = f_{xzz} = f_{yyz} = f_{yzz} = 0$，$f_{xyz} = 1$．

問題 2　(a) $\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} = 2^j \sin(x+2y+\frac{(i+j)\pi}{2})$．
(b) f は $\mathbb{R}^2$ 上 C^∞ 級なので，テイラーの公式より，任意の点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$（$(x,y) \neq (0,0)$）および N に対して，原点 $(0,0)$ と点 (x,y) を端点とする線分上に点 $(\xi_N,\eta_N) \neq (0,0),(x,y)$ が存在して $f(x,y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0)x^i y^j + R_N = \sum_{k=0}^{N}\sin\frac{k\pi}{2}\sum_{i+j=k}\frac{2^j x^i y^j}{i!j!} + R_N$ かつ $R_N = \sum_{i+j=N+1}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{N+1} f}{\partial x^i \partial y^j}(\xi_N,\eta_N)x^i y^j = \sin(\xi_N+2\eta_N+\frac{(N+1)\pi}{2})\sum_{i+j=N+1}\frac{2^j x^i y^j}{i!j!}$．剰余項に関して $R_N = \sin(\dots)\frac{(x+2y)^{N+1}}{(N+1)!}$ より $|R_N| \leq \frac{|x+2y|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ すなわち $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$．従って $f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{2}\sum_{i+j=k}\frac{2^j x^i y^j}{i!j!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{i+j=2k+1}\frac{2^j x^i y^j}{i!j!}(= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x+2y)^{2k+1}}{(2k+1)!})$．これが f の原点 $(0,0)$ でのテイラー展開である．
(c) 同様にテイラーの公式より，任意の点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$（$(x,y) \neq (\frac{\pi}{2},0)$）および N に対して，点 $(\frac{\pi}{2},0)$ と点 (x,y) を端点とする線分上に点 $(\xi_N,\eta_N) \neq (\frac{\pi}{2},0),(x,y)$ が存在して $f(x,y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(\frac{\pi}{2},0)(x-\frac{\pi}{2})^i y^j + R_N = \sum_{k=0}^{N}\sin\frac{(k+1)\pi}{2}\sum_{i+j=k}\frac{2^j(x-\frac{\pi}{2})^i y^j}{i!j!} + R_N$ かつ $R_N = \sum_{i+j=N+1}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{N+1} f}{\partial x^i \partial y^j}(\xi_N,\eta_N)(x-\frac{\pi}{2})^i y^j = \sin(\xi_N+2\eta_N+\frac{(N+1)\pi}{2})\sum_{i+j=N+1}\frac{2^j(x-\frac{\pi}{2})^i y^j}{i!j!}$．剰余項に関して同様にして $|R_N| \leq \frac{|x+2y-\frac{\pi}{2}|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ すなわち $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$．従って $f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sin\frac{(k+1)\pi}{2}\sum_{i+j=k}\frac{2^j(x-\frac{\pi}{2})^i y^j}{i!j!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{i+j=2k}\frac{2^j(x-\frac{\pi}{2})^i y^j}{i!j!}(= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-\frac{\pi}{2}+2y)^{2k}}{(2k)!})$．これが f の点 $(\frac{\pi}{2},0)$ でのテイラー展開である．

問題 3　指数関数のマクローリン展開より任意の $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(x,y,z) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(\alpha x+\beta y+\gamma z)^\ell}{\ell!}$．ここで $(\alpha x+\beta y+\gamma z)^\ell = \sum_{i+j+k=\ell}\frac{\ell!}{i!j!k!}\alpha^i\beta^j\gamma^k x^i y^j z^k$ なので $f(x,y,z) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{i+j+k=\ell}\frac{\alpha^i\beta^j\gamma^k}{i!j!k!}x^i y^j z^k$．

問題 4　$\sum_{j=1}^{n}\binom{k-1}{i_1,\dots,i_j-1,\dots,i_n} = \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ i_j\neq 0}}\frac{(k-1)!}{i_1!\cdots(i_j-1)!\cdots i_n!} = \frac{(k-1)!}{i_1!\cdots i_n!}\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ i_j\neq 0}} i_j = \frac{(k-1)!}{i_1!\cdots i_n!}(i_1+\cdots+i_n) = \frac{(k-1)!}{i_1!\cdots i_n!}\cdot k = \frac{k!}{i_1!\cdots i_n!} = \binom{k}{i_1,\dots,i_n}$．

問題 5　(a) 2 の分解 $(i_1,\dots,i_n)$ は次の 2 種類に分類できる：(i) ある j に対して $i_j = 2$ かつ $i_\ell = 0$（$\ell \neq j$）．(ii) ある $j < k$ に対して $i_j = i_k = 1$ かつ $i_\ell = 0$（$\ell \neq j,k$）．従って左辺は次のように表せる：$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{x_j x_j}(\boldsymbol{c})b_j^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} f_{x_j x_k}(\boldsymbol{c})b_j b_k$．一方，右辺の行列・ベクトル積は次に等しい：$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{x_j x_j}(\boldsymbol{c})b_j b_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{x_j x_j}(\boldsymbol{c})b_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq j<k\leq n}\{f_{x_j x_k}(\boldsymbol{c}) + f_{x_k x_j}(\boldsymbol{c})\}b_j b_k$．ここで f は点

$\boldsymbol{c}$ の近傍で C^2 級なので $f_{x_j x_k}(\boldsymbol{c}) = f_{x_k x_j}(\boldsymbol{c})$ が成り立つから最後の第 2 の和は $\sum_{1 \leq j < k \leq n} f_{x_j x_k}(\boldsymbol{c}) b_j b_k$ に等しい．以上より両辺相等しいことが示された．

(b) f は点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ を端点とする線分 I を含む領域上 C^2 級なので，テイラーの公式より点 $\boldsymbol{\xi} \in I \setminus \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\}$ が存在して $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i_1 + \cdots + i_n = 1} \frac{\partial f}{\partial x_1^{i_n} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_n - a_n)^{i_n} + \sum_{i_1 + \cdots + i_n = 2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{i_n} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{\xi})(x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_n - a_n)^{i_n}$．1 の分解 $(i_1, \ldots, i_n)$ は次の形をしている：ある j に対して $i_j = 1$ かつ $i_\ell = 0$ $(\ell \neq j)$．従って右辺第 1 の和は次のように表せる：$\sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\boldsymbol{a})(x_j - a_j) = G(\boldsymbol{a})^\mathsf{T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$．また右辺第 2 の和は (a) より $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\mathsf{T} H(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ に等しい．ゆえに $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + G(\boldsymbol{a})^\mathsf{T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\mathsf{T} H(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ が成り立つ．