4　陰関数定理（2019-10-17）

問題 1　方程式 $x^2 - y^2 + 1 = 0$ が次の範囲で定める陰関数 $y = g(x)$ を求めよ．

(a)　$y > 0$　　　　(b)　$y < 0$

問題 2　連立方程式

$$x_1 - x_2 = y_1 + y_2, \qquad x_1 y_2 = y_1 x_2 \qquad (x_1 + x_2 \neq 0)$$

の定める陰関数 $(y_1, y_2) = G(x_1, x_2)$ を求めよ．

問題 3　方程式 $x^3 - x + y^4 + y = 0$ を考える．陰関数定理を用いて次の問いに答えよ．
(a) この方程式が点 $(x, y) = (1, -1)$ の近傍で陰関数 $y = g(x)$ を一意に定めることを示せ．
(b) 陰関数 $y = g(x)$ は点 $x = 1$ で微分可能なことを示せ．また微分 $g'(1)$ を求めよ．
(c) この方程式が表す曲線の点 $(x, y) = (1, -1)$ での接線を求めよ．

問題 4　方程式 $z(y + z)(x + y + z) = 1$ を考える．陰関数定理を用いて次の問いに答えよ．
(a) この方程式が点 $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ の近傍で陰関数 $z = g(x, y)$ を一意に定めることを示せ．
(b) 陰関数 $z = g(x, y)$ は点 $(x, y) = (0, 0)$ で全変数に関して偏微分可能なことを示せ．また偏微分 $g_x(0, 0)$ および $g_y(0, 0)$ を求めよ．
(c) この方程式が表す曲面の点 $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ での接平面を求めよ．

問題 5　次の連立方程式を考える：

$$(x_1 + y_1)^2 = \exp(x_2 + y_2), \qquad x_1 + x_2 = \sin(y_1 y_2).$$

(a) この連立方程式が点 $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, -1, 0, 1)$ の近傍で陰関数 $(y_1, y_2) = G(x_1, x_2)$ を一意に定めることを示せ．
(b) $G = (g_1, g_2)$ とおくとき偏微分 $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(1, -1)$（$i, j = 1, 2$）を求めよ．

解答例（第 4 回）

問題 1　(a) $y=\sqrt{x^2+1}$．(b) $y=-\sqrt{x^2+1}$．

問題 2　$y_1=\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}x_1$，$y_2=\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}x_2$．

問題 3　この方程式は関数 $f(x,y)=x^3-x+y^4+y$ を用いて $f(x,y)=0$ と表せる．f の偏導関数は $f_x=3x^2-1$，$f_y=4y^3+1$．
(a) f は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級．また $f(1,-1)=0$ および $f_y(1,-1)=-3\neq 0$．従って陰関数定理より点 $(x,y)=(1,-1)$ の近傍で方程式は y に関して一意に解けて陰関数 $y=g(x)$ を一意に定める．
(b) 陰関数定理より陰関数 $y=g(x)$ は点 $x=1$ の近傍で C^1 級．特に点 $x=1$ で微分可能であり $g'(1)=-\frac{f_x(1,-1)}{f_y(1,-1)}=\frac{2}{3}$．
(c) 点 $(x,y)=(1,-1)$ の近傍では，$f(x,y)=0$ と $y=g(x)$ は同値なので方程式 $f(x,y)=0$ の表す曲線と陰関数 $y=g(x)$ のグラフは一致する．従って求める接線は $y=g(x)$ の点 $x=1$ での接線 $y=g'(1)(x-1)+g(1)=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ に等しい．

問題 4　この方程式は関数 $f(x,y,z)=z(y+z)(x+y+z)-1$ を用いて $f(x,y,z)=0$ と表せる．f の偏導関数は $f_x=z(y+z)$，$f_y=z(x+y+z)+z(y+z)$，$f_z=(y+z)(x+y+z)+z(x+y+z)+z(y+z)$．
(a) f は $\mathbb{R}^3$ 上 C^1 級．また $f(0,0,1)=0$ および $f_z(0,0,1)=3\neq 0$．従って陰関数定理より点 $(x,y,z)=(0,0,1)$ の近傍で方程式は z に関して一意に解けて陰関数 $z=g(x,y)$ を一意に定める．
(b) 陰関数定理より陰関数 $z=g(x,y)$ は点 $(x,y)=(0,0)$ の近傍で C^1 級．特に点 $(x,y)=(0,0)$ で全変数に関して偏微分可能であり $g_x(0,0)=-\frac{f_x(0,0,1)}{f_z(0,0,1)}=-\frac{1}{3}$，$g_y(0,0)=-\frac{f_y(0,0,1)}{f_z(0,0,1)}=-\frac{2}{3}$．
(c) 点 $(x,y,z)=(0,0,1)$ の近傍では，$f(x,y,z)=0$ と $z=g(x,y)$ は同値なので方程式 $f(x,y,z)=0$ の表す曲面と陰関数 $z=g(x,y)$ のグラフは一致する．従って求める接平面は $z=g(x,y)$ の点 $(x,y)=(0,0)$ での接平面 $z=g_x(0,0)x+g_y(0,0)y+g(0,0)=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+1$ に等しい．

問題 5　この連立方程式は関数 $f_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=\exp(x_2+y_2)-(x_1+y_1)^2$，$f_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=\sin(y_1y_2)-x_1-x_2$ を用いて $f_1=f_2=0$ と表せる．または $\mathbb{R}^2$ に値をとる関数 $F=(f_1,f_2)$ を用いて $F=(0,0)$．$F=(f_1,f_2)$ の偏導関数を並べた行列

$$F_{x_1,x_2}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2(x_1+y_1) & \exp(x_2+y_2)\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$
$$F_{y_1,y_2}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2(x_1+y_1) & \exp(x_2+y_2)\\ y_2\cos(y_1y_2) & y_1\cos(y_1y_2)\end{pmatrix}$$

を考える．
(a) $F=(f_1,f_2)$ は $\mathbb{R}^4$ 上 C^1 級．また $F(1,-1,0,1)=(0,0)$ および

$$\det F_{y_1,y_2}(1,-1,0,1)=\det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-1\neq 0.$$

従って陰関数定理より点 $(x_1,x_2,y_1,y_2)=(1,-1,0,1)$ の近傍で連立方程式は (y_1,y_2) に関して一意に解けて

陰関数 $(y_1, y_2) = G(x_1, x_2)$ を一意に定める．
(b) 陰関数定理より点 $(x_1, x_2) = (1, -1)$ の近傍で $G' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = -F_{y_1,y_2}^{-1} F_{x_1,x_2}$．特に $(x_1, x_2) = (1, -1)$ では

$$G'(1, -1) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

従って $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(1, -1) = 1$，$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(1, -1) = 1$，$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(1, -1) = 1$，$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(1, -1) = 4$．

5　テイラー展開（2019-10-24）

問題 1　次の関数 f の 1 階，2 階，3 階偏導関数をすべて求めよ．

(a)　$f(x,y)=(x^2+y^2)\exp(x^2+y^2)$　　　(b)　$f(x,y)=\log(x-y)$

(c)　$f(x,y,z)=1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz$

問題 2　関数 $f(x,y)=\sin(x+2y)$ を考える．

(a) $\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}$（$i,j=0,1,2,\dots$）を求めよ．

(b)（多変数関数に対する）テイラーの公式を用いて f の原点 $(0,0)$ でのテイラー展開を求めよ．

(c) 同じく f の点 $(\frac{\pi}{2},0)$ でのテイラー展開を求めよ．

問題 3　指数関数のマクローリン展開 $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$（$x\in\mathbb{R}$）を用いて，関数 $f(x,y,z)=\exp(\alpha x+\beta y+\gamma z)$ の原点 $(0,0,0)$ でのテイラー展開を $f(x,y,z)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{i+j+k=\ell}c_{i,j,k}x^iy^jz^k$ の形で求めよ．ただし右辺第 2 の和は ℓ の分解 (i,j,k) のすべてにわたる和である．

問題 4　n 項係数 $\binom{k}{i_1,\dots,i_n}=\frac{k!}{i_1!\cdots i_n!}$（$k=i_1+\cdots+i_n\ge 0$，$i_1,\dots,i_n\ge 0$）は関係式

$$\binom{k}{i_1,\dots,i_n}=\sum_{j=1}^{n}\binom{k-1}{i_1,\dots,i_j-1,\dots,i_n}$$

（$k=i_1+\cdots+i_n\ge 1$，$i_1,\dots,i_n\ge 0$）を満たすことを示せ．ただし $i_1,\dots,i_n$ のどれか 1 つでも負のとき $\binom{k-1}{i_1,\dots,i_n}=0$ である．

問題 5　この問題では $\mathbb{R}^n$ の点を列ベクトルで表す．関数 $f(\boldsymbol{x})$（$\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^\mathsf{T}$）は，相異なる 2 点 $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)^\mathsf{T}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^\mathsf{T}$ を端点とする線分 $I=\{(1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{x};\ 0\le t\le 1\}$ を含む領域上 C^2 級とする．

(a) 任意の $\boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_n)^\mathsf{T}$ および $\boldsymbol{c}\in I$ に対して

$$\sum_{i_1+\cdots+i_n=2}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{c})b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^\mathsf{T}H(\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$$

が成り立つことを示せ．ただし左辺は 2 の分解 $(i_1,\dots,i_n)$ のすべてにわたる和であり，右辺の H は次で定義される行列である：

$$H(\boldsymbol{x}):=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right)_{i,j=1,\dots,n}=\begin{pmatrix}f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x})\\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\boldsymbol{x})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_nx_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}.$$

(b) 点 $\boldsymbol{\xi}\in I\setminus\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\}$ が存在して

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})+G(\boldsymbol{a})^\mathsf{T}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\mathsf{T}H(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

が成り立つことをテイラーの公式を用いて示せ．ただし $G(\boldsymbol{x})=(f_{x_1}(\boldsymbol{x}),\dots,f_{x_n}(\boldsymbol{x}))^\mathsf{T}$ である．