3　連鎖律と平均値定理（2019-10-10）

問題 1　次の問いに答えよ．
(a) 関数 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を次で定める：$F = (f_1, f_2)$（$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$）とおくとき $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$，$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2x_3$．このとき F のヤコビ行列 F' を求めよ．
(b) $x = r\sin\theta$，$y = r\cos\theta$ のとき関数 $(r, \theta) \overset{F}{\longmapsto} (x, y)$ のヤコビ行列 F' とその行列式 $\det F'$ を求めよ．

問題 2　連鎖律を用いて次の問いに答えよ．
(a) 関数 $z = \exp(x^2 - y^2)$ の変数 x, y は，変数 t の関数としてそれぞれ $x = t + 1$，$y = t^2$ により与えられているとする．このとき導関数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を t の関数として表せ．
(b) 関数 $w = z\sin(xy)$ の変数 x, y, z は，変数 u, v の関数としてそれぞれ $x = u + v$，$y = uv$，$z = \frac{1}{v}$ により与えられているとする．このとき偏導関数 $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ を u, v の関数として表せ．

問題 3　関数 $z = f(x, y)$ は変数 x, y に関して偏微分可能であり偏導関数 f_x, f_y は連続とする．$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて z を変数 r, θ の関数とみなす．偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を f_x, f_y を用いて r, θ の関数として表せ．

問題 4　行列 $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は各 $i, j = 1, \ldots, n$ に対して $|q_{i,j} - p_{i,j}| \leq \varepsilon \leq 1$ を満たすとする．ただし $p_{i,j}, q_{i,j}$ はそれぞれ P, Q の第 (i, j) 成分である．このとき n と P の成分のみに依る定数 $M \geq 0$ が存在して $|\det Q - \det P| \leq M\varepsilon$ が成り立つことを示せ．

問題 5　この問題では $\mathbb{R}^n$ の点を縦ベクトルで表す．$\mathbb{R}^n$ に値をとる開集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 $F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ を考える．ただし $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$．各 $f_i : A \to \mathbb{R}$ は A 上全変数に関して偏微分可能で，偏導関数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$（$i, j = 1, \ldots, n$）は全て A 上連続とする．任意の点 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n \in A$ に対して行列 $J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を

$$J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{c}_i)\right)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{c}_1) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{c}_1) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{c}_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{c}_i) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{c}_i) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{c}_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{c}_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\boldsymbol{c}_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{c}_n) \end{pmatrix}$$

により定める．
(a) $U \subset A$ を n 次元球とする．任意の相異なる 2 点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ に対して，次を満たす点 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n \in U$ が存在することを（平均値定理を用いて）示せ：$F(\boldsymbol{x}_1) - F(\boldsymbol{x}_2) = J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$．
(b) F のヤコビ行列 F' は点 $\boldsymbol{a} \in A$ で正則とする．すなわち（$F'(\boldsymbol{a}) = J(\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a})$ より）$\det J(\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a}) \neq 0$．このとき次を満たす $\delta > 0$ が存在することを示せ：任意の点 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n \in U_\delta(\boldsymbol{a})$ に対して $\det J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \neq 0$．
(c) この $\boldsymbol{a}$ と δ に関して F は $U_\delta(\boldsymbol{a})$ 上単射であることを示せ．すなわち任意の相異なる 2 点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U_\delta(\boldsymbol{a})$ に対して $F(\boldsymbol{x}_1) \neq F(\boldsymbol{x}_2)$ が成り立つことを示せ．

解答例（第 3 回）

問題 1　(a) $F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 1 \\ 1 & -x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$.
(b) $F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{pmatrix}$，$\det F' = -r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -r$.

問題 2　(a) $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\exp(x^2-y^2) = 2(1+t-2t^3)\exp(1+2t+t^2-t^4)$.
(b) $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = z\cos(xy)(y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u}) + \sin(xy)\frac{\partial z}{\partial u} = (2u+v)\cos\{uv(u+v)\}$，$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = z\cos(xy)(y\frac{\partial x}{\partial v} + x\frac{\partial y}{\partial v}) + \sin(xy)\frac{\partial z}{\partial v} = (2u+\frac{u^2}{v})\cos\{uv(u+v)\} - \frac{1}{v^2}\sin\{uv(u+v)\}$.

問題 3　$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = f_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial r} + f_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial r} = f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$,
$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = f_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial \theta} + f_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\{f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\}$.

問題 4　$\bar{p} := \max_{i,j}|p_{i,j}|$ および $r_{i,j} = q_{i,j} - p_{i,j}$ とおく．このとき $|p_{i,j}| \leq \bar{p}$ および $|r_{i,j}| \leq \varepsilon \leq 1$ より，任意の $\{1,\ldots,n\}$ 上の置換 σ に対して $|\prod_{i=1}^n q_{i,\sigma(i)} - \prod_{i=1}^n p_{i,\sigma(i)}| = |\prod_{i=1}^n (p_{i,\sigma(i)} + r_{i,\sigma(i)}) - \prod_{i=1}^n p_{i,\sigma(i)}| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}\varepsilon^k \bar{p}^{n-k} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}\bar{p}^{n-k} = \varepsilon\{(\bar{p}+1)^n - \bar{p}^n\}$．ゆえに $|\det Q - \det P| \leq \sum_\sigma |\prod_{i=1}^n q_{i,\sigma(i)} - \prod_{i=1}^n p_{i,\sigma(i)}| \leq \varepsilon \cdot n!\{(\bar{p}+1)^n - \bar{p}^n\}$.

問題 5　(a) 相異なる 2 点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ を任意にとる．各 f_i に対して平均値定理より $f_i(\boldsymbol{x}_1) - f_i(\boldsymbol{x}_2) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{c}_i)(x_{1,j} - x_{2,j}) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{c}_i), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{c}_i))(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ を満たす点 $\boldsymbol{c}_i$ が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を端点とする線分上に存在する．ただし $\boldsymbol{x}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})^\top$．この線分は n 次元球 U に含まれるので $\boldsymbol{c}_i \in U$ である．この等式を $i = 1, \ldots, n$ に関してまとめると $F(\boldsymbol{x}_1) - F(\boldsymbol{x}_2) = J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ を得る．
(b) 偏導関数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は A 上連続なので，任意の $0 < \varepsilon \leq 1$ に対して次を満たす $\delta_{i,j} > 0$ が存在する：任意の点 $\boldsymbol{x} \in U_{\delta_{i,j}}(\boldsymbol{a})$ に対して $|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})| \leq \varepsilon$．特に $\delta := \min_{i,j}\delta_{i,j}$ とすれば任意の点 $\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{a})$ に対して，すべての $i, j = 1, \ldots, n$ に対して $|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})| \leq \varepsilon$．従ってこの δ に関しては，任意の点 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n \in U_\delta(\boldsymbol{a})$ に対して行列 $J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ と $J(\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a})$ の各成分の差は ε 以下なので，問題 4 より n と $J(\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a})$ のみに依る定数 $M \geq 0$ が存在して $\det J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ と $\det J(\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a})$ の差は $M\varepsilon$ 以下になる．特に $M\varepsilon < |\det J(\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a})|$ ならば両者は同符号．特にこの不等式を満たす ε から得られる δ は問題の要件を満たす．
(c) 相異なる 2 点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U_\delta(\boldsymbol{a})$ を任意にとる．このとき (a) より $F(\boldsymbol{x}_1) - F(\boldsymbol{x}_2) = J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ を満たす点 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n \in U_\delta(\boldsymbol{a})$ が存在する．今 $F(\boldsymbol{x}_1) = F(\boldsymbol{x}_2)$ とすると (b) より行列 $J(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ は正則なので $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ となり矛盾．ゆえに $F(\boldsymbol{x}_1) \neq F(\boldsymbol{x}_2)$ である．