2　偏微分（2019-10-03）

問題 1　次の関数 f の各変数に関する偏導関数を求めよ．

(a)　$f(x, y) = (ax + by)(cx + dy)$

(b)　$f(x, y) = \log(xy) \quad (xy > 0)$

(c)　$f(x, y, z) = \sin(x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}) \quad (x, y, z > 0)$

問題 2　次の関数 f と点 $\boldsymbol{a}$ に関して f の $\boldsymbol{a}$ での接（超）平面を求めよ．

(a)　$f(x, y, z) = ax + by + cz + d, \qquad \boldsymbol{a} = (10, 1010, 10101010)$

(b)　$f(x, y) = xy + x - y, \quad \boldsymbol{a} = (2, 3)$

(c)　$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2), \qquad \boldsymbol{a} = (0, 0)$

問題 3　点 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ は $\boldsymbol{a}$ で全微分可能とする．このとき f は $\boldsymbol{a}$ で連続であることを示せ．

問題 4　$\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

を考える．

(a) f は原点 $(0, 0)$ で各変数 x, y に関して偏微分可能であることを示せ．

(b) f は原点 $(0, 0)$ で連続でないことを示せ．

(c) f は原点 $(0, 0)$ で全微分可能でないことを示せ．

問題 5　任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{n} \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つことを示せ．

解答例（第 2 回）

問題 1　(a) $f_x = a(cx+dy)+(ax+by)c = 2acx+(ad+bc)y$, $f_y = b(cx+dy)+(ax+by)d = (ad+bc)x+2bdy$.
(b) $f(x,y) = \log x + \log y$ より $f_x = \frac{1}{x}$，$f_y = \frac{1}{y}$.
(c) $f_x = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}z^{\gamma}\cos(x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma})$，$f_y = \beta x^{\alpha}y^{\beta-1}z^{\gamma}\cos(x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma})$，$f_z = \gamma x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma-1}\cos(x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma})$.

問題 2　(a) f は $\mathbb{R}^3$ 上全変数に関して偏微分可能で，偏導関数 $f_x = a$，$f_y = b$，$f_z = c$ は $\mathbb{R}^3$ 上連続．これより f は $\mathbb{R}^3$ 上全微分可能であり f の $\boldsymbol{a}$ での接平面は $w = f_x(\boldsymbol{a})(x-10) + f_y(\boldsymbol{a})(y-1010) + f_z(\boldsymbol{a})(z-10101010) + f(\boldsymbol{a}) = ax+by+cz+d$.
(b) f は $\mathbb{R}^2$ 上全変数に関して偏微分可能で，偏導関数 $f_x = y+1$，$f_y = x-1$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続．これより f は $\mathbb{R}^2$ 上全微分可能であり f の $\boldsymbol{a} = (2,3)$ での接平面は $z = f_x(2,3)(x-2) + f_y(2,3)(y-3) + f(2,3) = 4(x-2)+(y-3)+5 = 4x+y-6$.
(c) f は $\mathbb{R}^2$ 上全変数に関して偏微分可能で，偏導関数 $f_x = -2x\exp(-x^2-y^2)$，$f_y = -2y\exp(-x^2-y^2)$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続．これより f は $\mathbb{R}^2$ 上全微分可能であり f の $\boldsymbol{a} = (0,0)$ での接平面は $z = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + f(0,0) = 1$.

問題 3　仮定より次が成り立つような定数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ と定数 $\delta > 0$ と $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす関数 ε が存在する：

$$\forall \boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{a}),\quad f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i-a_i) + \varepsilon(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|.$$

ただし $U_\delta(\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{a}$ を中心とする半径 δ の n 次元球である．従って $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}(x_i-a_i) = 0 = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$ より $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + 0 + 0 = f(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．

問題 4　(a) $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0}{x} = 0 \xmapsto{x\to 0} 0$ より f は原点 $(0,0)$ で変数 x に関して偏微分可能である．変数 y についても同様．
(b) 任意の $x \neq 0$ に対して $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$．特に任意の $\delta > 0$ に対して $|f(x,x)-f(0,0)| = |\frac{1}{2}-0| = \frac{1}{2}$ を満たす点 $(x,x) \in U_\delta(0,0)$ が存在するので $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\boldsymbol{x}) = f(0,0)$ は成り立たない．
(c) 問題 3 より連続性は全微分可能性の必要条件である．(b) より f は原点 $(0,0)$ で連続でないので全微分可能でない．

問題 5　$\boldsymbol{1} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n})$ および $\boldsymbol{x}' = (|x_1|,\ldots,|x_n|)$ とおく．このとき $\|\boldsymbol{1}\| = \sqrt{n}$ および $\|\boldsymbol{x}'\| = \|\boldsymbol{x}\|$．従って Schwarz の不等式より $\sum_{i=1}^{n}|x_i| = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot|x_i| \leq \|\boldsymbol{1}\|\|\boldsymbol{x}'\| = \sqrt{n}\cdot\|\boldsymbol{x}\|$.