1　関数の連続性（2019-09-26）

問題 1　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して次が成り立つことを示せ．

(a) Schwarz の不等式：$\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \geq |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k|$．ただし $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$．

(b) 三角不等式：$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$．

問題 2　集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して次の 2 命題は同値であることを示せ．

(i) A は開集合である．

(ii) A^{c} は閉集合である．

問題 3　集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ と点 $\boldsymbol{a} \in A$ に対して次の 2 命題は同値であることを示せ．

(i) $\boldsymbol{a}$ は A の内点である．

(ii) $U_\delta(\boldsymbol{a}) \subset A$ を満たす $\delta > 0$ が存在する．

問題 4　点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の n 次元球 $A = U_r(\boldsymbol{a})$ を考える．任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $s := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ とおく．次の命題を示せ．

(a) $s < r$ ならば $U_{r-s}(\boldsymbol{x}) \subset A$ が成り立つ．

(b) $s > r$ ならば $U_{s-r}(\boldsymbol{x}) \subset A^{\mathsf{c}}$ が成り立つ．

問題 5　$A, B \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$C, D \subset \mathbb{R}^n$ を閉集合とする．次の命題を示せ．

(a) $A \cup B$ は開集合である．

(b) $A \cap B$ は開集合である．

(c) $C \cup D$ は閉集合である．

(d) $C \cap D$ は閉集合である．

(e) $A \setminus C$ は開集合である．

(f) $C \setminus A$ は閉集合である．

ヒント: 集合のド・モルガン則 $(X \cup Y)^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{c}} \cap Y^{\mathsf{c}}$，$(X \cap Y)^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{c}} \cup Y^{\mathsf{c}}$ や関係式 $X \setminus Y = X \cap Y^{\mathsf{c}}$ を上手く用いる．

解答例（第 1 回）

問題 1　(a) $\boldsymbol{y}=(0,\ldots,0)$ のときは両辺とも 0 になるので不等式は成り立つ．さもなければ $z=\sum_{k=1}^n x_k y_k$ とおくと，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $0\le\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}\|^2=\sum_{k=1}^n(x_k+ty_k)^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+2tz+t^2\|\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2-\frac{z^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2}+\|\boldsymbol{y}\|^2(\frac{z}{\|\boldsymbol{y}\|^2}+t)^2$ より $\|\boldsymbol{x}\|^2-\frac{z^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\ge 0$ すなわち $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\ge|z|$.
(b) (a) より $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+2z+\|\boldsymbol{y}\|^2\le\|\boldsymbol{x}\|^2+2|z|+\|\boldsymbol{y}\|^2\le\|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|^2=(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2$ すなわち $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

問題 2　A を開集合とすると $\partial A^{\mathsf{c}}=\partial A\subset A^{\mathsf{c}}$ より A^{c} は閉集合である．逆に A^{c} を閉集合とすると $\partial A=\partial A^{\mathsf{c}}\subset A^{\mathsf{c}}$ より A は開集合である.

問題 3　$\boldsymbol{a}$ は A の内点 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\in A$ かつ $\boldsymbol{a}$ は A の境界点でない $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\in A$ かつある $\delta>0$ に関して $U_\delta(\boldsymbol{a})\cap A=\emptyset$ または $U_\delta(\boldsymbol{a})\cap A^{\mathsf{c}}=\emptyset$．ここで $U_\delta(\boldsymbol{a})\cap A=\emptyset\Leftrightarrow U_\delta(\boldsymbol{a})\subset A^{\mathsf{c}}$ は $\boldsymbol{a}\in U_\delta(\boldsymbol{a})$ より $\boldsymbol{a}\in A$ と両立しない．また $U_\delta(\boldsymbol{a})\cap A^{\mathsf{c}}=\emptyset\Leftrightarrow U_\delta(\boldsymbol{a})\subset A$．従って最後の命題は (ii) と同値である.

問題 4　(a) 任意の点 $\boldsymbol{y}\in U_{r-s}(\boldsymbol{x})$ に対して，三角不等式 (問題 1 (b)) より $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\|=\|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\|\le\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<(r-s)+s=r$ すなわち $\boldsymbol{y}\in A$ が成り立つ.
(b) 任意の点 $\boldsymbol{y}\in U_{r-s}(\boldsymbol{x})$ に対して，同じく三角不等式より $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\|\ge\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|>s-(s-r)=r$ すなわち $\boldsymbol{y}\in A^{\mathsf{c}}$ が成り立つ.

問題 5　(a) $A\cup B$ の点はすべて $A\cup B$ の内点であることを示せばよい．$\boldsymbol{x}\in A$ ならば A は開集合なので $\boldsymbol{x}$ は A の内点，特に問題 3 より $U_\delta(\boldsymbol{x})\subset A\subset A\cup B$ を満たす $\delta>0$ が存在する．同様に $\boldsymbol{x}\in B$ ならば B は開集合なので $U_\delta(\boldsymbol{x})\subset B\subset A\cup B$ を満たす $\delta>0$ が存在する．以上より任意の点 $\boldsymbol{x}\in A\cup B$ に対して，$U_\delta(\boldsymbol{x})\subset A\cup B$ を満たす $\delta>0$ が存在するので $\boldsymbol{x}$ は $A\cup B$ の内点である.
(b) $A\cap B$ の点はすべて $A\cap B$ の内点であることを示せばよい．任意の点 $\boldsymbol{x}\in A\cap B$ に対して，$\boldsymbol{x}\in A$ かつ $\boldsymbol{x}\in B$ より (a) と同様にして $U_{\delta_1}(\boldsymbol{x})\subset A$ および $U_{\delta_2}(\boldsymbol{x})\subset B$ を満たす $\delta_1,\delta_2>0$ が存在することが分かる．特に $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすると $U_\delta(\boldsymbol{x})\subset U_{\delta_1}(\boldsymbol{x})\subset A$ かつ $U_\delta(\boldsymbol{x})\subset U_{\delta_2}(\boldsymbol{x})\subset B$ より $U_\delta(\boldsymbol{x})\subset A\cap B$．これより $\boldsymbol{x}$ は $A\cap B$ の内点である.
(c) 問題 2 より $(C\cup D)^{\mathsf{c}}=C^{\mathsf{c}}\cap D^{\mathsf{c}}$ が開集合であることを示せばよい．問題 2 より $C^{\mathsf{c}},D^{\mathsf{c}}$ は開集合なので (b) より $C^{\mathsf{c}}\cap D^{\mathsf{c}}$ は開集合である.
(d) 同様に $(C\cap D)^{\mathsf{c}}=C^{\mathsf{c}}\cup D^{\mathsf{c}}$ が開集合であることを示せばよい．問題 2 より $C^{\mathsf{c}},D^{\mathsf{c}}$ は開集合なので (a) より $C^{\mathsf{c}}\cup D^{\mathsf{c}}$ は開集合である.
(e) 仮定と問題 2 より A,C^{c} は開集合なので (b) より $A\setminus C=A\cap C^{\mathsf{c}}$ は開集合である.
(f) 仮定と問題 2 より C,A^{c} は閉集合なので (d) より $C\setminus A=C\cap A^{\mathsf{c}}$ は閉集合である.