解析学 I-1：中間試験の復習（2019-07-25）

問題 1　次の級数の和を求めよ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a^k \qquad (a > -1)$　　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$　　(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(2k)!} \qquad (x \geq 0)$

問題 2　次の関数 f の導関数を求めよ．

(a) $f(x) = \cos a^x + \sin a^x \qquad (a > 0)$　　(b) $f(x) = \sqrt{x^x} \qquad (x > 0)$

問題 3　次の関数の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^y$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x \qquad (a > 0)$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x$

問題 4　関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$（$x > 0$）に関して次の問いに答えよ．ただし増減表を用いずに議論すること．
(a) f の極値点を求めよ．極大・極小についても議論すること．
(b) f の変曲点を求めよ．f がどこで上に凸，下に凸になるかについても議論すること．
(c) f のグラフの概形を描け．ただし極値点と変曲点の位置を明示すること．極限 $\lim_{x\to 0+0} f(x)$ と $\lim_{x\to\infty} f(x)$ についても議論すること．

問題 5　余弦関数 $f(x) = \sin x + \cos x$ は $\mathbb{R}$ 上 $C^{(\infty)}$ 級である．
(a) f の第 k 階導関数を求めよ．
(b) テイラーの公式を用いて f のマクローリン展開を求めよ．剰余項の極限についても議論すること．

解答例（解析学 I-1：中間試験の復習）

問題 1　(a) $-1<a<1$ のとき $\frac{1}{1-a}$ に収束．$a\geq 1$ のとき ∞ に発散．
(b) $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})$ より $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{4}$．従って級数の和は $\frac{3}{4}$．
(c) 任意の y に対して $\cos y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}$ より $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt{x}^{2k}}{(2k)!}=\cos\sqrt{x}$.

問題 2　(a) $f'(x)=a^x\log a(\cos a^x-\sin a^x)$.
(b) $\log f(x)=\frac{x\log x}{2}$ の両辺を x で微分すると $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\log x+1}{2}$．従って $f'(x)=\frac{\sqrt{x^x}(\log x+1)}{2}$.

問題 3　(a) $y>0$ のとき ∞．$y=0$ のとき 1．$y<0$ のとき 0.
(b) $a>1$ のとき 0．$a=1$ のとき 1．$0<a<1$ のとき ∞.
(c) $(x-\frac{\pi}{2})\tan x=\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{\cos x}$ の分母と分子は $x\to\frac{\pi}{2}-0$ の極限でともに 0 に収束する．そこで分母と分子をそれぞれ微分すると $-\frac{\sin x+(x-\frac{\pi}{2})\cos x}{\sin x}\xrightarrow{x\to\frac{\pi}{2}-0}-1$．従ってロピタルの法則より $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(x-\frac{\pi}{2})\tan x=-1$.

問題 4　(a) f は $x>0$ で連続なので極値点は停留点の中にある．$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$ より $f'(x)=0$ となる f の停留点は $x=\mathrm{e}$ のみ．$f''(x)=\frac{2\log x-3}{x^3}$ より $f''(\mathrm{e})=-\frac{1}{\mathrm{e}^3}<0$ なので停留点 $x=\mathrm{e}$ は f の極大点である．
(b) $f''(x)=\frac{2\log x-3}{x^3}$ より $0<x<\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ で $f''<0$ なので f はそこで上に凸．$x>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ で $f''>0$ なので f はそこで下に凸．従って上に凸と下に凸の入れ替わる点 $x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ が f の変曲点である．
(c) $\lim_{x\to 0+0}f(x)=-\infty$．$f(x)=\frac{\log x}{x}$ の分母と分子は $x\to\infty$ の極限でともに ∞ に発散する．そこで分母と分子をそれぞれ微分すると $\frac{1}{x}\xrightarrow{x\to\infty}0$．従ってロピタルの法則より $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$．$x>1$ のとき $f>0$ なので $x\to\infty$ の極限で f のグラフは正の側から x 軸に漸近する．グラフの概形は略.

問題 5　(a) $f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{k\pi}{2})+\cos(x+\frac{k\pi}{2})$.
(b) テイラーの公式より任意の $x\neq 0$ と $n=0,1,2,\dots$ に対して $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$ を満たす点 ξ_n が原点と点 x に間に存在する．剰余項 $R_n:=\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$ に関して $|f^{(n+1)}(y)|=|\sin(y+\frac{k\pi}{2})+\cos(y+\frac{k\pi}{2})|\leq 2$ より $|R_n|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$ が成り立つので $\lim_{n\to\infty}R_n=0$．これより任意の x に対して $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ が成り立つ．（$x=0$ のときも右辺の級数は $f(0)$ になるので成り立つ．）ここで $f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}+\cos\frac{k\pi}{2}$ は k を 4 で割った余りが $0,1$ のとき 1，$2,3$ のとき -1 になる．（すなわち $f^{(k)}(0)=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$．）従って任意の x に対して $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!}x^k=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$．これが $f(x)=\sin x+\cos x$ のマクローリン展開である．