## 13　広義積分（2019-07-18）

**問題 1**　次の広義積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{\alpha x}\,dx$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$　(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(d) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$　$(a<b)$

**問題 2**　級数

$$H(\alpha)=\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}\qquad(\alpha>0)$$

に関して（広義）積分を用いて次の問いに答えよ．
(a) $0<\alpha\le 1$ のとき級数 $H(\alpha)$ は $\infty$ に発散することを示せ．
(b) $\alpha>1$ のとき級数 $H(\alpha)$ は $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ 以下の数に収束することを示せ．

**問題 3**　任意の $t>0$ に対して関数 $f_t(x)=x^{t-1}e^{-x}$（$x>0$）を考える．
(a) $0<t<1$ のとき $f_t$ は区間 $(0,1]$ 上広義積分可能であることを証明する．以下の（∗）を埋めて証明を完成させよ．

*Proof.* $0<t<1$ とする．$f_t$ は $(0,1]$ 上連続なのでそこで特異点を持たない．しかし $0<x\le 1$ のとき $f_t(x)\ge$（ア）より $\lim_{x\to 0+0} f_t(x)=\infty$ となるので原点 $x=0$ は $f_t$ の特異点である．従って $f_t$ が $(0,1]$ 上広義積分可能であることを示すには積分 $I(a):=\int_a^1 f_t(x)\,dx$ に関して極限 $\lim_{a\to 0+0} I(a)$ が存在することを示せばよい．$f_t$ は $(0,1]$ 上（イ）なので，この極限は存在するか $\infty$ に発散するかのいずれかであることに注意する．$0<x\le 1$ のとき $e^{-x}\le$（ウ）より $f_t(x)\le$（エ）なので $0<a\le 1$ のとき $I(a)\le\int_a^1$（エ）$dx=$（オ）$\le\frac{1}{t}$ が成り立つ．特に $0<a\le 1$ の範囲で $I(a)$ がとり得る値は上に有界なので $\lim_{a\to 0+0} I(a)$ は $\infty$ に発散しない．□

(b) $t>0$ のとき $f_t$ は区間 $[1,\infty)$ 上広義積分可能であることを証明する．以下の（∗）を埋めて証明を完成させよ．

*Proof.* $t>0$ とする．$f_t$ は $[1,\infty)$ 上連続なのでそこで特異点を持たない．従って $f_t$ が $[1,\infty)$ 上広義積分可能であることを示すには積分 $J(b):=\int_1^b f_t(x)\,dx$ に関して極限 $\lim_{b\to\infty} J(b)$ が存在することを示せばよい．$f_t$ は $[1,\infty)$ 上（ア）なので，この極限は存在するか $\infty$ に発散するかのいずれかであることに注意する．$n$ を $t$ 以上の任意の整数とする．$x\ge 1$ のとき $x^{t-1}\le$（イ）より $f_t(x)\le$（ウ）なので $b\ge 1$ のとき $J(b)\le\int_1^b$（ウ）$dx=$（エ）$\le\frac{(n-1)!}{e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$ が成り立つ．特に $b\ge 1$ の範囲で $J(b)$ がとり得る値は上に有界なので $\lim_{b\to\infty} J(b)$ は $\infty$ に発散しない．□

以上より任意の $t>0$ に対して $f_t$ は区間 $(0,\infty)$ 上広義積分可能で

$$\Gamma(t):=\int_0^\infty f_t(x)\,dx=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx$$

が定まる．

(c) 任意の $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ が成り立つことを示せ．

(d) 任意の整数 $n \geq 0$ に対して $\Gamma(n+1) = n!$ が成り立つことを示せ．

**問題 4**　有界区間 $I = [a, b)$ 上の関数 $f$ は次を満たすとする：

(i) $f$ は $I$ 上連続.

(ii) 任意の $x \in [a, b)$ に対して $f(x) < \alpha$.

このとき任意の $I$ 上の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ が成り立つことを証明する．次の（＊）を埋めて証明を完成させよ．

*Proof.* $I$ 上の数列 $\{x_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ を満たさないとする．このときある点 $c \in [a, b)$ に対して次が成り立つ：任意の $N$ に対して（ア）を満たす $n \geq N$ が存在する．特に（ア）を満たす $n$ は無数に存在するので $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{k_n}\}$（$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$）で（イ）を満たすものが存在する．(i) より $f$ は $[a, c]$ 上連続なので（ウ）の定理より次を満たす点 $d \in [a, c]$ が存在する：任意の $x \in [a, c]$ に対して $f(x) \leq f(d)$．特に任意の $n$ に対して $f(x_{k_n}) \leq$（エ）が成り立つので数列 $\{f(x_{k_n})\}$ は（エ）より大きい値に収束したり $\infty$ に発散したりしない．特に (ii) より（エ）$<$（オ）が成り立つので数列 $\{f(x_{k_n})\}$ は $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) =$（オ）を満たさない．ゆえに（カ）を部分列として含む数列 $\{f(x_n)\}$ は $\lim_{n\to\infty} f(x_n) =$（オ）を満たさない． $\square$

解答例（第 13 回）

問題 1　(a) 任意の $b \geq 0$ に対して $\alpha = 0$ のとき $\int_0^b \mathrm{d}x = b \xrightarrow{b\to\infty} \infty$．$\alpha > 0$ のとき $\int_0^b \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = [\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}]_0^b = \frac{\mathrm{e}^{\alpha b}-1}{\alpha} \xrightarrow{b\to\infty} \infty$．$\alpha < 0$ のとき同様にして $\int_0^b \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha b}-1}{\alpha} \xrightarrow{b\to\infty} -\frac{1}{\alpha}$．以上より広義積分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ は $\alpha \geq 0$ のとき $\infty$ に発散し $\alpha < 0$ のとき $-\frac{1}{\alpha}$ に収束する．
(b) 任意の $0 < a < 1$ に対して $\int_a^1 \log x\,\mathrm{d}x = [x\log x - x]_a^1 = (a - 1 - a\log a) \xrightarrow{a\to 0+0} -1$．（$a\log a = \frac{\log a}{a^{-1}}$ の分母と分子は $a \to 0+0$ の極限でそれぞれ $-\infty$ と $\infty$ に発散する．そこで分母と分子をそれぞれ微分すると $\frac{a^{-1}}{-a^{-2}} = -a \xrightarrow{a\to 0+0} 0$．従ってロピタルの法則より $\lim_{a\to 0+0} a\log a = 0$.）従って $\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = -1$．
(c) $x = \tan t$（$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$）とおくと $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \pi$.
(d) $x = \frac{a(1-t)+b(1+t)}{2}$ とおくと $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} =: I$．ここで $t = \sin\theta$ とおくと $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \pi$.

問題 2　(a) 級数 $H(\alpha)$ の最初の $n$ 項による部分和 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ は階段関数 $\varphi(x) = \frac{1}{\lfloor x\rfloor}^\alpha$（$x \geq 1$）の積分 $\int_1^{n+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ に等しい．積分区間 $[1, n+1]$ 上 $\varphi(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}$ なので $s_n = \int_1^{n+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} =: J_n$．最後の積分に関して $0 < \alpha < 1$ のとき $J_n = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$．$\alpha = 1$ のとき $J_n = \log(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$．いずれにしろ $\lim_{n\to\infty} J_n = \infty$ なので $H(\alpha) = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.
(b) 級数 $H(\alpha)$ の初項を除いた最初の $n$ 項による部分和 $t_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha}$ は階段関数 $\psi(x) = \frac{1}{\lceil x\rceil^\alpha}$（$x > 0$）の積分 $\int_1^n \psi(x)\,\mathrm{d}x$ に等しい．積分区間 $[1, n]$ 上 $\psi(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$ なので $t_n = \int_1^n \psi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$．関数 $y = \frac{1}{x^\alpha}$ は $x \geq 1$ で非負なので $\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$．最後の広義積分は $\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1-b^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1} \xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}$ より $\frac{1}{\alpha-1}$．以上より $t_n \leq \frac{1}{\alpha-1}$ なので単調増加数列 $\{t_n\}$ は上界である $\frac{1}{\alpha-1}$ 以下の数に収束する．ゆえに $H(\alpha) = 1 + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \lim_{n\to\infty} t_n$ は $1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ 以下の数に収束する．

問題 3　(a)（ア）$\frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}}$（イ）正（ウ）$1$（エ）$x^{t-1}$（オ）$\frac{1-a^t}{t}$
(b)（ア）正（イ）$x^{n-1}$（ウ）$x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}$（エ）$\frac{(n-1)!}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-b^k\mathrm{e}^{1-b}}{k!}$
(c) $t > 0$ のとき部分積分により $\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+0} a^t\mathrm{e}^{-a} - \lim_{b\to\infty} b^t\mathrm{e}^{-b} + t\int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 - 0 + t\Gamma(t) = t\Gamma(t)$.
(d) まず $n = 0$ のとき $\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+0} \mathrm{e}^{-a} - \lim_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-b} = 1 - 0 = 1$．次に $n \geq 1$ のとき (c) より $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$.

問題 4　（ア）$x_n \leq c$（イ）$x_{k_n} \leq c$（ウ）Weierstrass（エ）$f(d)$（オ）$\alpha$（カ）$\{f(x_{k_n})\}$