12　積分 2（2019-07-11）

問題 1　次の積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{d}x$　　(b) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$　　(c) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$　　$(0\le a<1)$

(d) $\displaystyle\int_a^b \log x\,\mathrm{d}x$　　$(a,b>0)$

問題 2　次の積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$　　(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$　　(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$　　(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$

問題 3　$a>0$ および $p>1$ とする．$\mathbb{R}^2$ の第 1 象限において直線 $\mathrm{L}: y=ax$ と曲線 $\mathrm{C}: y=x^p$ を考える．

(a)　L と C の交点を求めよ．

(b)　L と C の概形を図示せよ．

(c)　L と C により囲まれる有界領域の面積を求めよ．

問題 4　次の積分を考える：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\dots.$$

(a) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$ が成り立つことを示せ．

(b) $n\ge 2$ のとき $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ が成り立つことを示せ．

(c) I_n を求めよ．

以下では関数 f,g は区間 $[a,b]$ 上有界とする．前回の演習問題にある $P(\Delta)$，$Q(\Delta)$ の定義において関数 f を任意の関数 φ に替えたものをそれぞれ $P(\varphi;\Delta)$，$Q(\varphi;\Delta)$ と表す．また $[a,b]$ を n 等分する分割を Δ_n とおく．

問題 5　関数 f,g は区間 $[a,b]$ 上積分可能とする．ただし $a<b$．このとき関数 fg は $[a,b]$ 上積分可能であることを証明する．次の（∗）を埋めて証明を完成させよ．

Proof. f,g は $[a,b]$ 上有界なので上限 $C(f):=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ および $C(g):=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ はそれぞれ非負の定数である．任意の $x,y\in[a,b]$ に対して $|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\le C(g)$（ア）$+\,C(f)$（イ）が成り立つ．また任意の部分区間 $I\subset[a,b]$ に対して $\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x)=\sup_{x,y\in I}$（ア）および $\sup_{x\in I}g(x)-\inf_{x\in I}g(x)=\sup_{x,y\in I}$（イ）が成り立つ．以上より不等式

$$0\le Q(fg;\Delta_n)-P(fg;\Delta_n)\le C(g)\,(\text{ウ})+C(f)\,(\text{エ})\tag{*}$$

を得る．

今 $d(\Delta_n)=$（オ）より $\lim_{n\to\infty}d(\Delta_n)=0$ である．従って Darboux の定理より $\lim_{n\to\infty}$（ウ）$=$（カ）$-$（キ）および $\lim_{n\to\infty}$（エ）$=$（ク）$-$（ケ）が成り立つ．さらに f は $[a,b]$ 上積分可能なので（カ）$=$（キ）である．同

様に g は $[a,b]$ 上積分可能なので（ク）=（ケ）である．これより不等式 (*) の右辺は $n \to \infty$ の極限で（コ）に収束する．一方 Darboux の定理より不等式 (*) の中辺は $n \to \infty$ の極限で（サ）に収束する．ゆえにはさみうちの原理より（サ）=（コ）が成り立つので fg は $[a,b]$ 上積分可能である． □

問題 6　関数 f は区間 $[a,b]$ 上積分可能とする．ただし $a < b$．また f は $[a,b]$ 上非零とする．このとき関数 $\frac{1}{f}$ は $[a,b]$ 上積分可能であることを証明する．次の（$*$）を埋めて証明を完成させよ．

Proof. f は $[a,b]$ 上非零なので下限 $C = \inf_{x \in [a,b]} |f(x)|$ は正の定数である．任意の $x, y \in [a,b]$ に対して $|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}| \leq \frac{(\text{ア})}{C^2}$ が成り立つ．また任意の部分区間 $I \subset [a,b]$ に対して $\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) = \sup_{x,y \in I}$（ア）が成り立つ．以上より不等式

$$0 \leq Q\left(\frac{1}{f}; \Delta_n\right) - P\left(\frac{1}{f}; \Delta_n\right) \leq \frac{(\text{イ})}{C^2} \tag{**}$$

を得る．今 $d(\Delta_n) =$（ウ）より $\lim_{n \to \infty} d(\Delta_n) = 0$ である．従って Darboux の定理より $\lim_{n \to \infty}$（イ）=（エ）−（オ）が成り立つ．さらに f は $[a,b]$ 上積分可能なので（エ）=（オ）である．これより不等式 (**) の右辺は $n \to \infty$ の極限で（カ）に収束する．一方 Darboux の定理より不等式 (**) の中辺は $n \to \infty$ の極限で（キ）に収束する．ゆえにはさみうちの原理より（キ）=（カ）が成り立つので $\frac{1}{f}$ は $[a,b]$ 上積分可能である． □

問題 7　関数 f は区間 $[a,b]$ 上連続とする．ただし $a < b$．$[a,b]$ 上の関数 $g(x) := \max_{t \in [a,x]} f(t)$ は $\lim_{x \to a+0} g(x) = f(a)$ を満たすことを示せ．

解答例（第 12 回）

問題 1　(a) $\int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{d}x = [\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx]_0^1 = \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d$.
(b) $\alpha=0$ のとき $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$．$\alpha\neq 0$ のとき $\int_a^b \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = [\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}]_a^b = \frac{\mathrm{e}^{\alpha b}-\mathrm{e}^{\alpha a}}{\alpha}$.
(c) $\int_{-a}^a \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = 2\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \int_0^a (\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})\,\mathrm{d}x = [-\log(1-x)+\log(1+x)]_0^a = \log\frac{1+a}{1-a}$.
(d) $\int_a^b \log x\,\mathrm{d}x = [x\log x - x]_a^b = b\log b - a\log a - b + a$.

問題 2　(a) $x=t^2$ とおくと $\int_0^\pi \sin\sqrt{x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t$．ここで部分積分を用いて $\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = [-t\cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t = \pi + [\sin t]_0^\pi = \pi$．従って求める積分は 2π.
(b) $x=\tan t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$）とおくと $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
(c) $x=\sin t$ とおくと $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t|\cos t|\,\mathrm{d}t$．ここで積分区間 $0\le t\le\frac{\pi}{6}$ で $\cos t\ge 0$ なので求める積分は $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2t+1}{2}\,\mathrm{d}t = [\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{12}$.
(d) 求める積分を I とおく．部分積分を用いて $I = [\mathrm{e}^x\sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = -[-\mathrm{e}^x\cos x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2\pi}-1-I$．これより $I=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{2}$.

問題 3　(a) 第 1 象限における直線 L と曲線 C の交点の x 座標は方程式 $ax=x^p$ の非負解 $x=0, a^{\frac{1}{p-1}}$．従って求める交点は原点 $(0,0)$ と点 $(a^{\frac{1}{p-1}}, a^{\frac{p}{p-1}})$ の 2 点.
(b) 略.
(c) 求める面積 S は区間 $0\le x\le a^{\frac{1}{p-1}}$ において直線 L と x 軸のはさむ面積から直線 C と x 軸のはさむ面積を引いたものに等しい．従って $S=\int_0^{a^{\frac{1}{p-1}}} ax\,\mathrm{d}x - \int_0^{a^{\frac{1}{p-1}}} x^p\,\mathrm{d}x = \int_0^{a^{\frac{1}{p-1}}} (ax-x^p)\,\mathrm{d}x = [\frac{ax^2}{2}-\frac{x^{p+1}}{p+1}]_0^{a^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{p+1}\cdot a^{\frac{p+1}{p-1}}$.

問題 4　(a) $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと $I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)\,(-1)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.
(b) $n\ge 2$ のとき部分積分を用いて $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}x = [-\cos x\cdot\sin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x = (n-1)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2}-I_n)$．これより $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.
(c) 漸化式の初期値は $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ および $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x = 1$．これより n が偶数ならば $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$ であり奇数ならば $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$.

問題 5　（ア）$|f(x)-f(y)|$（イ）$|g(x)-g(y)|$（ウ）$\{Q(f;\Delta_n)-P(f;\Delta_n)\}$（エ）$\{Q(g;\Delta_n)-P(g;\Delta_n)\}$（オ）$\frac{b-a}{n}$（カ）$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$（キ）$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$（ク）$\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$（ケ）$\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$（コ）$0$（サ）$\overline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

問題 6　（ア）$|f(x)-f(y)|$　（イ）$\{Q(f;\Delta_n)-P(f;\Delta_n)\}$　（ウ）$\frac{b-a}{n}$　（エ）$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$　（オ）$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$　（カ）0　（キ）$\overline{\int_a^b}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$

問題 7　$\varepsilon>0$ とする．f は a で（右側）連続なので次を満たす $\delta>0$ が存在する：$a\le t<a+\delta$ ならば $|f(t)-f(a)|<\varepsilon$．このとき $a<x<a+\delta$ ならば $a\in[a,x]\subset[a,a+\delta]$ より $f(a)\le g(x)\le \max_{t\in[a,a+\delta]} f(t)\le f(a)+\varepsilon$ なので $|g(x)-f(a)|\le\varepsilon$ が成り立つ.