11　積分 1（2019-07-04）

（有界閉）区間 $[a,b]$ 上で有界な関数 f および $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ に対して，次の記法を定義なしで用いてよい：

$$P(\Delta) := \sum_{k=1}^{n} p_k(x_k - x_{k-1}), \qquad Q(\Delta) := \sum_{k=1}^{n} q_k(x_k - x_{k-1}); \qquad d(\Delta) := \max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1}).$$

ただし $p_k := \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$，$q_k := \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ である．

問題 1　関数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ に関する積分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ を区分求積により求める．区間 $[0,1]$ の分割 $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ を $x_k = \frac{k}{n}$ により定める．

(a) $P(\Delta_n)$ を求めよ．

(b) $Q(\Delta_n) - P(\Delta_n)$ を求めよ．

(c) f は $[0,1]$ 上積分可能である（すなわち $\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x$ が成り立つ）ことを Darboux の定理を用いて示せ．

(d) 積分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ を求めよ．

問題 2　関数 f は区間 $[a,b]$ 上有界かつ積分可能とする．このとき任意の $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ に対して次の命題を証明する：f は各小区間 $[x_{k-1},x_k]$ 上積分可能で $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ が成り立つ．次の（ア）〜（シ）を埋めて証明を完成させよ．

(a) 各小区間 $I_k := [x_{k-1},x_k]$ および I_k の任意の分割 Δ_k に対して，$P(\Delta)$, $Q(\Delta)$ の定義において $[a,b]$ を $[x_{k-1},x_k]$ に，Δ を Δ_k に替えたものをそれぞれ $P_k(\Delta_k)$, $Q_k(\Delta_k)$ と表す．各小区間 I_k に対して I_k を n 等分する分割を $\Delta_{k,n}$ とおく．このとき $d(\Delta_{k,n}) =$（ア）より $\lim_{n\to\infty} d(\Delta_{k,n}) = 0$ である．従って Darboux の定理より $\underline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x =$（イ）および $\overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x =$（ウ）が成り立つ．

(b) 区間 $[a,b]$ の分割 Δ_n を Δ と $\Delta_{1,n},\ldots,\Delta_{m,n}$ の分点をすべて併せてつくる．このとき $d(\Delta_n) =$（エ）より $\lim_{n\to\infty} d(\Delta_n) = 0$ である．従って Darboux の定理より $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x =$（オ）および $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x =$（カ）が成り立つ．

(c) 以上より等式（キ）$= \sum_{k=1}^m P_k(\Delta_{k,n})$ において両辺 $n\to\infty$ の極限をとると

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m \underline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{*}$$

を得る．同様に等式（ク）$= \sum_{k=1}^m Q_k(\Delta_{k,n})$ において両辺 $n\to\infty$ の極限をとると $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m \overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x$ を得る．ゆえに $\sum_{k=1}^m \{\overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x =$（ケ）が成り立つ．ここで各 k に対して $\overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x \ \ge$（ケ）が成り立つので $\overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x =$（コ）でなければならない．すなわち f は $I_k = [x_{k-1},x_k]$ 上積分可能である．

(d) 仮定より f は $[a,b]$ 上積分可能なので (*) の左辺の下積分は積分（サ）に等しい．また f は I_k 上積分可能なので (*) の右辺に現れる下積分 $\underline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)\,\mathrm{d}x$ は積分（シ）に等しい．ゆえに (*) より $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$

$\sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ が成り立つ.

問題 3　関数 f は区間 $[a,b]$ 上有界かつ積分可能とする.

(a) 任意の部分区間 $[c,d] \subset [a,b]$ に対して

$$\sup_{x\in[c,d]} |f(x)| - \inf_{x\in[c,d]} |f(x)| \leq \sup_{x\in[c,d]} f(x) - \inf_{x\in[c,d]} f(x)$$

が成り立つことを示せ.

(b) 関数 $|f|$ は $[a,b]$ 上積分可能であること Darboux の定理を用いてを示せ.

(c) $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ が成り立つことを示せ.

問題 4　関数 f は有界閉区間 I 上連続とする. 次が成り立つとき f は I 上一様連続であるという：

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall x, x' \in I \text{ s.t. } |x - x'| < \delta, \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

(a) f は I 上一様連続でないとする. このとき次を満たす $\varepsilon > 0$ と I 上の数列 $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ が存在することを示せ：任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$.

(b) Bolzano–Weierstrass の定理を用いて f は I 上一様連続であることを示せ.

解答例（第 11 回）

問題 1　(a) f は単調増加なので任意の区間 $[c,d]$ 上 $\inf_{x\in[c,d]} f(x) = f(c)$．従って $P(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\frac{k-1}{n}} = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}$．
(b) f は単調増加なので任意の区間 $[c,d]$ 上 $\sup_{x\in[c,d]} f(x) = f(d)$．従って $Q(\Delta_n) - P(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}\{f(x_n) - f(x_0)\} = \frac{\mathrm{e}-1}{n}$．
(c) $d(\Delta_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ なので Darboux の定理より $\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} P(\Delta_n)$ かつ $\overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} Q(\Delta_n)$．従って (b) より $\overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\{Q(\Delta_n) - P(\Delta_n)\} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}-1}{n} = 0$．これより $\overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x$ が成り立つので f は $[0,1]$ 上積分可能である．
(d) (c) より $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \underline{\int_0^1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} P(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}$．ここで $\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\mathrm{e}^0}{\frac{1}{n}-0}$ は $n\to\infty$ の極限で指数関数 $y = \mathrm{e}^x$ の原点 $x = 0$ での微分すなわち 1 に収束するので，最後の極限は $\mathrm{e}-1$ に等しい．ゆえに $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$ である．

問題 2　（ア）$\frac{x_k - x_{k-1}}{n}$ （イ）$\lim_{n\to\infty} P_k(\Delta_{k,n})$ （ウ）$\lim_{n\to\infty} Q_k(\Delta_{k,n})$ （エ）$\frac{d(\Delta)}{n}$ （オ）$\lim_{n\to\infty} P(\Delta_n)$ （カ）$\lim_{n\to\infty} Q(\Delta_n)$ （キ）$P(\Delta_n)$ （ク）$Q(\Delta_n)$ （ケ）0 （コ）0 （サ）$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ （シ）$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x$

問題 3　(a) 不等式の左辺は $\sup_{x,y\in[c,d]} ||f(x)| - |f(y)||$ に，右辺は $\sup_{x,y\in[c,d]} |f(x) - f(y)|$ にそれぞれ等しい．任意の p, q に対して $||p| - |q|| \le |p - q|$ が成り立つことから問題の不等式を得る．
(b) $P(\Delta)$, $Q(\Delta)$ の定義において f を $|f|$ に替えたものをそれぞれ $P'(\Delta)$, $Q'(\Delta)$ とおく．区間 $[a,b]$ を n 等分する分割を Δ_n とおく．（$d(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.）このとき (a) より $0 \le Q'(\Delta_n) - P'(\Delta_n) \le Q(\Delta_n) - P(\Delta_n)$ が成り立つ．この不等式において $n\to\infty$ の極限をとると Darboux の定理と仮定より $0 \le \overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$．従って $\underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ すなわち $|f|$ は $[a,b]$ 上積分可能である．
(c) 絶対値の三角不等式 $|p+q| \le |p| + |q|$ より $|P(\Delta_n)| \le P'(\Delta_n)$ が成り立つ．この不等式において $n\to\infty$ の極限をとると Darboux の定理と仮定より左辺の絶対値の中身は $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ に収束する．また Darboux の定理と (b) より右辺は $\underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ に収束する．ゆえに $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ が成り立つ．

問題 4　(a) f は I 上一様連続でないので次の命題が成り立つ：

$$\exists\varepsilon > 0, \quad \forall\delta > 0, \quad \exists x, x' \in I \text{ s.t. } |x - x'| < \delta, \quad |f(x) - f(x')| \ge \varepsilon.$$

特に次を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する：任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ を満たす $x_n, x'_n \in I$ で $|f(x_n) - f(x'_n)| \ge \varepsilon$ を満たすものが存在する．従ってそのような x_n, x'_n を並べた数列 $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ は ε とともに問題の要件を満たす．
(b) 数列 $\{x_n\}$ は有界なので Bolzano–Weierstrass の定理より収束する部分列を含む．そこで部分列 $\{x_{k_n}\}$（$k_1 < k_2 < \cdots$）は点 c に収束するとする．（I は閉集合なので $c \in I$ である．）すると $|x_{k_n} - x'_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \le \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ より $\{x'_n\}$ の部分列 $\{x'_{k_n}\}$ も同じ c に収束する．f は $c \in I$ で連続なのでこれより $\lim_{n\to\infty} |f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| = |f(c) - f(c)| = 0$．特にある n に関して $|f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| < \varepsilon$ となり矛盾．