10　テイラー展開（2019-06-20）

問題 1　正弦関数 $f(x) = \sin x$ は $\mathbb{R}$ 上 $C^{(\infty)}$ 級である．

(a) f の第 k 階導関数を求めよ．

(b) テイラーの公式を用いて f のマクローリン展開を求めよ．剰余項の極限についても議論すること．

問題 2　$0 < a \neq 1$ とする．指数関数 $f(x) = a^x$ は $\mathbb{R}$ 上 $C^{(\infty)}$ 級である．

(a) f の第 k 階導関数を求めよ．

(b) テイラーの公式を用いて f のマクローリン展開を求めよ．剰余項の極限についても議論すること．

問題 3　対数関数 $f(x) = \log x$ は $x > 0$ で $C^{(\infty)}$ 級である．

(a) f の第 k 階導関数を求めよ．

(b) テイラーの公式を用いて f の点 $x = 1$ でのテイラー展開を求めよ．剰余項の極限についても議論すること．

問題 4　次の問いに答えよ．

(a) 双曲線関数 $f(x) = \sinh x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ のマクローリン展開を求めよ．

(b) 双曲線関数 $f(x) = \cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ のマクローリン展開を求めよ．

(c) 関数 $f(x) = \sin x \cos x$ のマクローリン展開を求めよ．

問題 5　次の問いに答えよ．

(a) $r > -1$ のとき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ の和を求めよ．

(b) 関数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開を (a) を用いて求めよ．

(c) 関数 $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ のマクローリン展開を次の命題を用いて求めよ：級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ と $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ はともに絶対収束するとし，それぞれの和を α, β とおく．このとき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$ は $\alpha\beta$ に収束する．

解答例（第 10 回）

問題 1　(a) $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ より $f^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$.
(b) テイラーの公式より任意の点 $x \neq 0$ と $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k + R_n, \qquad R_n = \frac{\sin(\xi_n + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1}$$

を満たす点 $\xi_n \neq 0, x$ が x と原点 0 の間に存在する．ここで剰余項 R_n に関して $|\sin| \leq 1$ より

$$|R_n| = \frac{|\sin(\xi_n + \frac{(n+1)\pi}{2})|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

なので $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$．ゆえに任意の x に対して $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k$ が成り立つ．さらに

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & (k \bmod 4 = 1), \\ -1 & (k \bmod 4 = 3), \\ 0 & (k\text{: even}) \end{cases}$$

より任意の x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

これが $f(x) = \sin x$ のマクローリン展開である．

問題 2　(a) $f'(x) = a^x \log a$ より $f^{(k)}(x) = a^x (\log a)^k$.
(b) テイラーの公式より任意の点 $x \neq 0$ と $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\log a)^k}{k!} x^k + R_n, \qquad R_n = \frac{a^{\xi_n} (\log a)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

を満たす点 $\xi_n \neq 0, x$ が x と原点 0 の間に存在する．ここで $0 < a < 1$ のときは $a^{\xi_n} < a^{-|x|}$，$a > 1$ のときは $a^{\xi_n} < a^{|x|}$．従って $\alpha(x) := \max\{a^{|x|}, a^{-|x|}\}$ とおくとき，剰余項 R_n に関して

$$|R_n| = \frac{a^{\xi_n} |\log a|^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \alpha(x) \cdot \frac{|x \log a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

より $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$．ゆえに任意の x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \log a)^k}{k!} = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \frac{(x \log a)^3}{3!} + \cdots$$

が成り立つ．これが $f(x) = a^x$ のマクローリン展開である．

問題 3　(a) $f'(x) = x^{-1}$ より $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! x^{-k}$.
(b) テイラーの公式より任意の点 $0 < x \neq 1$ と $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k + R_n, \qquad R_n = \frac{(-1)^n}{\xi_n^{n+1}(n+1)} (x-1)^{n+1}$$

を満たす点 $\xi_n \neq 0, x$ が x と点 1 の間に存在する．ここで剰余項 R_n に関して $|R_n| = \frac{1}{n+1}(\frac{|x-1|}{\xi_n})^{n+1}$．特に $0 < x < 1$ のとき $x < \xi_n < 1$ より $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}(\frac{1-x}{x})^{n+1}$ なので，$\frac{1}{2} \leq x < 1$ ならば $0 < \frac{1-x}{x} \leq 1$ より $|R_n| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$．また $x > 1$ のとき $1 < \xi_n < x$ より $|R_n| = \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$ なので，$1 < x \leq 2$ ならば $0 < x - 1 \leq 1$ より $|R_n| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$．以上より $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ ならば $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$．ゆえに任意の $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}(x-1)^k = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

が成り立つ．これが $f(x) = \log x$ の $x = 1$ でのテイラー展開である．

問題 4　(a) 指数関数 $y = \mathrm{e}^x$ のマクローリン展開より任意の x に対して $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ が成り立つ．従って任意の x に対して $f(x) = \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{1-(-1)^k\}x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$．これが $f(x) = \sinh x$ のマクローリン展開である．
(b) (a) と同様にして，任意の x に対して $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{1+(-1)^k\}x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$．これが $f(x) = \cosh x$ のマクローリン展開である．
(c) 正弦関数 $y = \sin x$ のマクローリン展開より任意の x に対して $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ が成り立つ．従って任意の x に対して $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$．これが $f(x) = \sin x \cos x$ のマクローリン展開である．

問題 5　(a) $-1 < r < 1$ のとき $\frac{1}{1-r}$，$r \geq 1$ のとき ∞．
(b) (a) より $-1 < x < 1$ のとき $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$．これが $f(x) = \frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開である．
(c) (a) より $-1 < x < 1$ のとき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ は $\frac{1}{1-x}$ に絶対収束する．従って $-1 < x < 1$ のとき命題より $g(x) = (\frac{1}{1-x})^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k} x^\ell x^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$．これが $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ のマクローリン展開である．