9　微分とグラフ（2019-06-13）

問題 1　関数 f, g はともに n 回微分可能とする．微分のライプニッツ則 $(fg)' = f'g + fg'$ を用いて，積 $h = fg$ に関して

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

が成り立つことを示せ．ただし関数 φ に対して $\varphi^{(0)} = \varphi$ および整数 $k \geq 1$ に対して $\varphi^{(k)}$ は φ の第 k 階導関数を表す．
ヒント：二項係数 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ の関係式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$（$1 \leq n \geq k \geq 0$）を用いる．ただし $\binom{n-1}{-1} = 0 = \binom{n-1}{n}$ である．

問題 2　次の関数 f の第 n 階導関数を求めよ．

(a)　$f(x) = x^{\alpha}$　　(b)　$f(x) = \sin x$　　(c)　$f(x) = x^3 \mathrm{e}^x$

問題 3　関数 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x - 10$ に関して次の問いに答えよ．
(a) f の極値点と極値を求めよ．極大・極小についても議論せよ．
(b) f の変曲点と変曲点での値を求めよ．どこで下に凸・上に凸になるかも議論せよ．
(c) f のグラフの概形を描け．関数値がどこで減少・増加するか，および無限遠での挙動も議論すること．

問題 4　関数 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ に関して前問と同じ問いに答えよ．

問題 5　関数 $f(x) = x^{\alpha}$ を考える．次の各場合に対して f は $x > 0$ で下または上に凸かどうか議論せよ．

(a)　$\alpha = 0$　　(b)　$0 < \alpha < 1$　　(c)　$\alpha = 1$　　(d)　$\alpha > 1$

問題 6　次の問いに答えよ．
(a) 関数 f は閉区間 $[a, b]$ 上で単調増加かつ閉区間 $[b, c]$ 上で単調増加とする．このとき f は $[a, c]$ 上で単調増加であることを示せ．
(b) 次の命題は成り立つとは限らないことを示せ：連続関数 f は閉区間 $[a, b]$ 上で下に凸かつ閉区間 $[b, c]$ 上で下に凸とする．このとき f は $[a, c]$ 上で下に凸である．

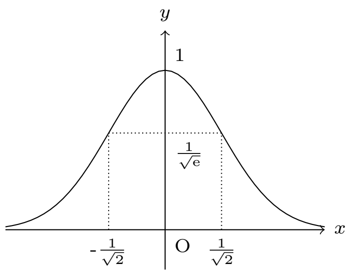
解答例（第 9 回）

問題 1　n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは微分のライプニッツ則そのもの．$n \geq 2$ のときは帰納法の仮定と微分のライプニッツ則より $h^{(n)} = (h^{(n-1)})' = (\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}f^{(k)}g^{(n-k-1)})' = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(f^{(k)}g^{(n-k-1)})' = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(f^{(k+1)}g^{(n-k-1)} + f^{(k)}g^{(n-k)}) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k-1)} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$．ここで 1 つ目の和は $\binom{n-1}{-1} = 0$ より $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}f^{(k)}g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}f^{(k)}g^{(n-k)}$ に等しく，2 つ目の和は $\binom{n-1}{n} = 0$ より $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$ に等しいので $h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\}f^{(k)}g^{(n-k)}$．さらに $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ よりこの和は $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$ に等しい．

問題 2　(a) $f^{(n)}(x) = x^{\alpha-n}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)$.
(b) $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ より $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.
(c) 問題 1 より $f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}x^3\mathrm{e}^x + \binom{n}{1}3x^2\mathrm{e}^x + \binom{n}{2}6x\mathrm{e}^x + \binom{n}{3}6\mathrm{e}^x = \{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\}\mathrm{e}^x$.

問題 3　(a) f は $\mathbb{R}$ 上微分可能なので f の極値点は停留点の中にある．$f'(x) = 12x^2 + 18x - 12 = 6(x+2)(2x-1)$ より f の停留点は $x = -2, \frac{1}{2}$．$f''(x) = 24x + 18$ より $f''(-2) = -30 < 0$ なので f は停留点 $x = -2$ で極大値 $f(-2) = 18$ をとる．また $f''(\frac{1}{2}) = 30 > 0$ なので f は停留点 $x = \frac{1}{2}$ で極小値 $f(\frac{1}{2}) = -\frac{53}{4}$ をとる．
(b) f'' は $x < -\frac{3}{4}$ で負なので f は $x \leq -\frac{3}{4}$ で狭義の上に凸．f'' は $x > -\frac{3}{4}$ で正なので f は $x \geq -\frac{3}{4}$ で狭義の下に凸. ゆえに f の変曲点は $x = -\frac{3}{4}$ であり，そこでの値は $f(-\frac{3}{4}) = \frac{19}{8}$.
(c) f' は $x < -2$ および $x > \frac{1}{2}$ で正なので f は $x \leq -2$ および $x \geq \frac{1}{2}$ で狭義単調増加．f' は $-2 < x < \frac{1}{2}$ で負なので f は $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ で狭義単調減少．$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$（複号同順）．$f$ のグラフの概形は略.

問題 4　(a) f は $\mathbb{R}$ 上微分可能なので f の極値点は停留点の中にある．$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ より f の停留点は $x = 0$ のみ．$f''(x) = 2(2x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2}$ より $f''(0) = -2 < 0$ なので f は $x = 0$ で極大値 $f(0) = 1$ をとる．
(b) f'' は $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ で負なので f は $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ で狭義の上に凸．f'' は $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ および $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ で正なので f は $x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ および $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ で狭義の下に凸．ゆえに f の変曲点は $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり，そこでの値は $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
(c) f' は $x < 0$ で正なので f は $x \leq 0$ で狭義単調増加．f' は $x > 0$ で負なので f は $x \geq 0$ で狭義単調減少．$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$（複号同順）．$f$ のグラフの概形は：



問題 5　(a) 定数関数 $f(x) = 1$ は任意の $0 < p < x < q$ に対して $f(x) = 1 = \frac{f(p)(x-q) - f(q)(x-p)}{p-q}$ を満たす．

従って f は $x>0$ で下に凸かつ上に凸．
(b) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ は $x>0$ で負．従って f は $x>0$ で狭義の上に凸．
(c) 1 次関数 $f(x)=x$ は任意の $0<p<x<q$ に対して $f(x)=x=\frac{f(p)(x-q)-f(q)(x-p)}{p-q}$ を満たす．従って f は $x>0$ で下に凸かつ上に凸．
(d) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ は $x>0$ で正．従って f は $x>0$ で狭義の下に凸．

問題 6　(a) 任意の $a\le x<x'\le c$ に対して，$a\le x<x'\le b$ または $b\le x<x'\le c$ のときは仮定より $f(x)<f(x')$．一方 $a\le x<b<x'\le c$ のときは仮定より $f(x)<f(b)<f(x')$．
(b) 連続関数

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x<0),\\ (x-1)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

は任意の $a<0$ と $c>0$ に対して $[a,0]$ 上で下に凸かつ $[0,c]$ 上で下に凸であるが，$[a,c]$ 上では下に凸でない．実際，任意の $0<p<1$ に対して，グラフ上の点 $(-p,f(-p))=(-p,(p+1)^2)$ と点 $(p,f(p))=(p,(p+1)^2)$ を結ぶ線分は f のグラフより真に下にある．