8　ロピタルの法則（2019-06-06）

問題 1　次の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\quad (b\neq 0)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)}{\cos(bx)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad (a,b>0)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{a^x-b^x}{x^2}\quad (a,b>0)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(x-\log x)$

問題 2　$a>1$ とする．
(a) 任意の整数 $n\geq 1$ に対して $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$ が成り立つことを示せ．
(b) 任意の実数 $t>0$ に対して $\lim_{x\to\infty}\frac{x^t}{a^x}=0$ が成り立つことを示せ．

問題 3　命題「$\lim_{x\to 0+0}f(\frac{1}{x})=\alpha$ ならば $\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$」を次の各場合に関して示せ．
(a) $|\alpha|<\infty$.
(b) $\alpha=\infty$.

問題 4　開区間 (a,b) 上で定義された関数 f,g は次を満たすとする．

(i) $\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty=\lim_{x\to a+0}g(x)$.
(ii) f,g は (a,b) 上微分可能.
(iii) g' は (a,b) 上非零.
(iv) $\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha$.

このとき $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ が成り立つことを示そう．まず $|\alpha|<\infty$ の場合を考える．$0<\varepsilon<1$ とする．
(a) 次を満たす $y\in(a,b)$ が存在することを示せ：$a<t<y$ ならば $|\frac{f'(t)}{g'(t)}-\alpha|<\varepsilon$.
(b) 次を満たす $c\in(a,y]$ が存在することを示せ：$a<t<c$ ならば $0<f(t)>f(y)$ かつ $0<g(t)>g(y)$.
　以上より $x\in(a,c)$ に対して $h_y(x):=\frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)}$ を考えることができる．
(c) 次を満たす $d\in(a,c)$ が存在することを示せ：$a<x<d$ ならば $|h_y(x)-1|<\varepsilon$.
(d) 次を満たす（ε に依らない）定数 $C>0$ が存在することを示せ：$a<x<d$ ならば $|\frac{f(x)}{g(x)}-\alpha|<C\varepsilon$.
　以上より $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ は示された．次に $\alpha=\infty$ の場合を考える．このとき
(e) $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ が成り立つことを示せ．

問題 5　$\mathbb{R}$ 上の関数 f を次で定める：

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}) & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

(a) f は原点（$x=0$）で微分可能であることを示せ．また微分 $f'(0)$ を求めよ．
(b) 導関数 f' は原点で連続でないことを示せ．

解答例（第 8 回）

問題 1　(a) 分母と分子は $x \to 0$ の極限でともに 0 に収束する．そこで分母と分子を微分すると $\frac{a\cos(ax)}{b\cos(bx)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{a}{b}$．従ってロピタルの法則より求める極限は $\frac{a}{b}$．(b) 1．(c) 分母と分子は $x \to 0$ の極限でともに 0 に収束する．そこで分母と分子を微分すると $a^x \log a - b^x \log b \xrightarrow{x\to 0} \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$．従ってロピタルの法則より求める極限は $\log \frac{a}{b}$．(d) $a = b$ のとき $\lim_{x\to 0+0} \frac{0}{x^2} = 0$．$a \neq b$ のときは $\frac{a^x - b^x}{x^2} = \frac{a^x - b^x}{x} \cdot \frac{1}{x}$ に注意すると，前問と $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$ より $a > b$ のとき ∞，$a < b$ のとき $-\infty$．(e) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$ の分母と分子は $x \to 0$ の極限でともに 0 に収束する．そこで分母と分子を微分すると $\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$．この分母と分子は $x \to 0$ の極限でともに 0 に収束する．そこでさらに分母と分子を微分すると $\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} \xrightarrow{x\to 0} 0$．従ってロピタルの法則を 2 回用いて求める極限は 0．(f) $\frac{\log x}{x}$ の分母と分子は $x \to \infty$ の極限でそれぞれ ∞ に発散する．そこで分母と分子を微分すると $\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$．従ってロピタルの法則より $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$．ゆえに $x - \log x = x(1 - \frac{\log x}{x}) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$．

問題 2　(a) n に関する帰納法で示す．まず $n = 0$ のとき $\lim_{x\to\infty} \frac{x^0}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = 0$．次に $n \geq 1$ のとき $\frac{x^n}{a^x}$ の分母と分子は $x \to \infty$ の極限でともに ∞ に発散する．そこで分母と分子を微分すると，帰納法の仮定より $\frac{nx^{n-1}}{a^x \log a} = \frac{n}{\log a} \cdot \frac{x^{n-1}}{a^x} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{n}{\log a} \cdot 0 = 0$．ゆえにロピタルの法則より $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$.
(b) n を実数 $t > 0$ 以上の整数とすると，任意の $x \geq 1$ に対して $0 \leq \frac{x^t}{a^x} \leq \frac{x^n}{a^x}$．前問より不等式の右辺は $x \to \infty$ の極限で 0 に収束するので，はさみうちの原理より $\lim_{x\to\infty} \frac{x^t}{a^x} = 0$.

問題 3　(a) $|\alpha| < \infty$ かつ $\lim_{x\to 0+0} f(\frac{1}{x}) = \alpha$ とする．$\varepsilon > 0$ とする．このとき次を満たす $\delta > 0$ が存在する：$0 < x < \delta$ ならば $|f(\frac{1}{x}) - \alpha| < \varepsilon$．従って $x > \frac{1}{\delta}$ ならば $0 < x^{-1} < \delta$ より $|f(x) - \alpha| = |f(\frac{1}{x^{-1}}) - \alpha| < \varepsilon$. ゆえに $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$.
(b) $\lim_{x\to 0+0} f(\frac{1}{x}) = \infty$ とする．M を任意にとる．このとき次を満たす $\delta > 0$ が存在する：$0 < x < \delta$ ならば $f(\frac{1}{x}) > M$．従って $x > \frac{1}{\delta}$ ならば $0 < x^{-1} < \delta$ より $f(x) = f(\frac{1}{x^{-1}}) > M$．ゆえに $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

問題 4　(a) 仮定 (iv) より明らか.
(b) 仮定 (i) より次を満たす $c' \in (a, b)$ が存在する：$a < t < c'$ ならば $f(t) > 0$．同様に次を満たす $c'' \in (a, b)$ が存在する：$a < t < c''$ ならば $f(t) > f(y)$．従って $c_1 := \min\{c', c'', y\}$ とおけば $c_1 \in (a, y]$ かつ $0 < t < c$ のとき $0 < f(t) > f(y)$．同様にして次を満たす $c_2 \in (a, y]$ の存在を示せる：$a < t < c_2$ ならば $0 < g(t) > g(y)$．ゆえに $c := \min\{c_1, c_2\}$ は問題の条件を満たす.
(c) 仮定 (i) より $\lim_{x\to a+0} h_y(x) = 1$．これより（$h_y$ の定義域である）(a, c) の中に問題の条件を満たす d が存在する.
(d) $x \in (a, c)$ に対して $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \times h_y(x)$．ここで Cauchy の平均値の定理より次を満たす $\xi \in (x, y) \subset (a, y)$ が存在する：$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$．従って $a < x < d$ ならば (a)–(c) より $|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha| = |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \times h_y(x) - \alpha| = |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \times h_y(x) - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \alpha| \leq |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}||h_y(x) - 1| + |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \alpha| < (|\alpha| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon < (|\alpha| + 2)\varepsilon$.
(e) $M > 0$ とする．仮定 (iv) より次を満たす $y \in (a, b)$ が存在する：$a < t < y$ ならば $\frac{f'(t)}{g'(t)} > M$．また (b) のように $c \in (a, y]$ をとって $x \in (a, c)$ に対して $h_y(x)$ を定めるとき，(c) と同様に次を満たす $d \in (a, c)$ が存在する：$a < x < d$ ならば $|h_y(x) - 1| < \frac{1}{M}$．従って (d) と同様に $\xi \in (x, y) \subset (a, y)$ をとれば，$a < x < d$

のとき $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \times h_y(x) > M(1-\frac{1}{M}) = M-1$．以上より $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ は示された．

問題 5　(a) $x \neq 0$ のとき $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x\to 0} 0$．（実際 $|\sin| \leq 1$ より $|x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \xrightarrow{x\to 0} 0$．）従って f は原点で微分可能であり $f'(0)=0$．

(b) $x \neq 0$ のとき $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$．これより極限 $\lim_{x\to 0+0} f'(x)$ は $f'(0)=0$ でない．実際 $\lim_{x\to 0+0} f'(x) = 0$ とすると $\lim_{x\to 0+0} 2x\sin(\frac{1}{x}) = 0$ より $\lim_{x\to 0+0}\cos(\frac{1}{x}) = 0$．しかし $x>0$ をどれだけ小さくとっても $\cos(\frac{1}{x})$ はどこかで 1 になるからこれは成り立たない．