7　三角関数と指数・対数関数の微分／平均値の定理（2019-05-30）

問題 1　次の関数 f の導関数を求めよ．

(a)　$f(x)=\sin x^2+\cos^2 x$　　(b)　$f(x)=\log(\log x)\quad(x>1)$

(c)　$f(x)=a^{x^2+x+1}\quad(a>0)$　　(d)　$f(x)=x^{x^x}\quad(x>0)$

問題 2　次の関数 f の導関数を求めよ．

(a) $f(x)=\mathrm{Arcsin}\,x$（$|x|<1$）．ただし Arcsin は sin の定義域を $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ に制限したときの逆関数である．

(b) $f(x)=\mathrm{Arccos}\,x$（$|x|<1$）．ただし Arccos は cos の定義域を $[0,\pi]$ に制限したときの逆関数である．

(c) $f(x)=\mathrm{Arctan}\,x$．ただし Arctan は tan の定義域を $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に制限したときの逆関数である．

問題 3　任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して，関数 $f(x)=x^\alpha$ は $x>0$ で微分可能で $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ を満たすことを示せ．

問題 4　双曲線関数 $f(x)=\sinh x:=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ および $g(x)=\cosh x:=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ を考える．

(a) $g^2-f^2=1$ が成り立つことを示せ．

(b) f と g の導関数をそれぞれ求めよ．

問題 5　関数 f は閉区間 $[a,b]$ 上連続，開区間 (a,b) 上微分可能とする．ただし $-\infty<a<b<\infty$．このとき f とその導関数 f' に関する次の命題を（Lagrange の平均値の定理を用いて）示せ．

(a) f' は (a,b) 上 0 とする．このとき f は $[a,b]$ 上定数である．（すなわち任意の $a<x\leq b$ に対して $f(x)=f(a)$ が成り立つ．）

(b) f' は (a,b) 上正とする．このとき f は $[a,b]$ 上狭義単調増加である．（すなわち任意の $a\leq x<x'\leq b$ に対して $f(x)<f(x')$ が成り立つ．）

問題 6　関数 f,g は $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{y\to\alpha}g(y)=\beta$ を満たすとする．ただし $|\beta|<\infty$．このとき次の各場合に関して $\lim_{x\to a}g\circ f(x)=\beta$ が成り立つことを（関数の極限の定義に基づいて）示せ．

(a)　$|a|<\infty,\ |\alpha|<\infty$　　(b)　$a=\infty=\alpha$

解答例（第 7 回）

問題 1　(a) $f'(x) = 2x\cos x^2 - 2\sin x\cos x$．(b) $f'(x) = \frac{1}{x\log x}$．(c) $f'(x) = (2x+1)a^{x^2+x+1}\log a$.
(d) $g(x) = x^x$ とおくと $\log g(x) = x\log x$ より $g'(x) = g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\log x = x^x(\log x + 1)$．さらにこのとき $\log f(x) = g(x)\log x$ より $f'(x) = f(x)\{g'(x)\log x + \frac{g(x)}{x}\} = x^{x^x}\{x^x\log x(\log x+1) + x^{x-1}\} = x^{x^x+x}\{(\log x)^2 + \log x + x^{-1}\}$.

問題 2　(a) $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ とおく．このとき $x = \sin y$ なので $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\cos y}$．ここで $|y| < \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$．従って $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(b) $y = \mathrm{Arccos}\, x$ とおく．このとき $x = \cos y$ なので $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = -\frac{1}{\sin y}$．ここで $0 \leq y \leq \pi$ より $\sin y \geq 0$ なので $\sin y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$．従って $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(c) $y = \mathrm{Arctan}\, x$ とおく．このとき $x = \tan y$ なので $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

問題 3　$g(x) := \log f(x) = \alpha\log x$ とおく．このとき $g(x)$ は $x > 0$ で微分可能で $g'(x) = \frac{\alpha}{x}$．これより $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$ は（$\mathbb{R}$ 上微分可能な）指数関数と g の合成関数なので $x > 0$ で微分可能で $f'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{g(x)} = g'(x)f(x) = \frac{\alpha}{x}\cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.

問題 4　(a) $f^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2}{4}$ および $g^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2}{4}$ より $g^2 - f^2 = \frac{4}{4} = 1$.
(b) $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x$．$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x$.

問題 5　(a) $a < x \leq b$ とする．仮定より f は $[a,x]$ 上連続かつ (a,x) 上微分可能なので，Lagrange の平均値の定理より次を満たす $c \in (a,x)$ が存在する：$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$．ここで仮定より $f'(c) = 0$ なので $f(x) - f(a) = 0$ すなわち $f(x) = f(a)$.
(b) $a \leq x < x' \leq b$ とする．仮定より f は $[x,x']$ 上連続かつ (x,x') 上微分可能なので，Lagrange の平均値の定理より次を満たす $c \in (x,x')$ が存在する：$f(x') - f(x) = f'(c)(x'-x)$．ここで仮定より $f'(c) > 0$ かつ $x' - x > 0$ なので $f(x') - f(x) > 0$ すなわち $f(x) < f(x')$.

問題 6　(a) $\varepsilon > 0$ とする．$\lim_{y\to\alpha} g(y) = \beta$ より次を満たす $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ が存在する：$0 < |y-\alpha| < \gamma$ ならば $|g(y)-\beta| < \varepsilon$．さらに $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ より，この γ に対して次を満たす $\delta = \delta(\gamma) > 0$ が存在する：$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-\alpha| < \gamma$．従って $0 < |x-a| < \delta = \delta(\gamma(\varepsilon))$ ならば $|g(f(x)) - \beta| < \varepsilon$ が成り立つ.
(b) $\varepsilon > 0$ とする．$\lim_{y\to\infty} g(y) = \beta$ より次を満たす $S = S(\varepsilon)$ が存在する：$y > S$ ならば $|g(y)-\beta| < \varepsilon$．さらに $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ より，この S に対して次を満たす $T = T(S)$ が存在する：$x > T$ ならば $f(x) > S$．従って $x > T = T(S(\varepsilon))$ ならば $|g(f(x)) - \beta| < \varepsilon$ が成り立つ.