6　微分（2019-05-23）

問題 1　次の命題を示せ．

(a) 関数 $f(x)=1$ の導関数は $f'(x)=0$ である．

(b) 関数 $f(x)=x$ の導関数は $f'(x)=1$ である．

(c) 任意の整数 $n\geq 1$ に対して，関数 $f(x)=x^n$ の導関数は $f'(x)=nx^{n-1}$ である．

(d) 任意の整数 $n\leq -1$ に対して，関数 $f(x)=x^n$（$x\neq 0$）の導関数は $f'(x)=nx^{n-1}$ である．

(e) 任意の整数 $n\geq 1$ に対して，関数 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$（$x>0$）の導関数は $f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ である．

(f) 任意の有理数 r に対して，関数 $f(x)=x^r$（$x>0$）の導関数は $f'(x)=rx^{r-1}$ である．

問題 2　次の関数 f の導関数を求めよ．

(a)　$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k \quad (0\leq n\in\mathbb{Z})$$

(b)　$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-c_k) \quad (1\leq n\in\mathbb{Z})$$

問題 3　2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である．

(a) 導関数 f' を求めよ．

(b) 曲線 $y=f(x)$ の $x=p$ での接線を求めよ．

(c) この接線は点 $(p,f(p))$ を除いて曲線 $y=f(x)$ と交わらないことを示せ．

問題 4　正整数 n に対して，連続関数 f を次で定義する：

$$f(x)=\begin{cases} x^n & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

このとき次の命題を示せ．

(a) $n=1$ のとき $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない．

(b) $n\geq 2$ のとき $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であり $f'(0)=0$.

問題 5　数列 $\{a_n\}$ を $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$（$n=1,2,3,\ldots$）により定める．

(a) 二項定理を用いて次を示せ：$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(1-\frac{\ell}{n})$.

(b) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ．

(c) 次を示せ：$a_n\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

(d) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ は 3 以下の数に収束することを示せ．

(e) 数列 $\{a_n\}$ は 2.5 より大きく 3 以下の値に収束することを示せ．

解答例（第 6 回）

問題 1　(a) 任意の x に対して $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0 \xrightarrow{h\to 0} 0$ より $f'(x)=0$.
(b) 任意の x に対して $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = 1 \xrightarrow{h\to 0} 1$ より $f'(x)=1$.
(c) n が正整数のとき，任意の x に対して $\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k(x+h)^{n-k-1} \xrightarrow{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1} = nx^{n-1}$. 従って $f'(x)=nx^{n-1}$.
(d) n が負整数のとき $g(x)=x^{-n}$ とおくと (c) より $g'(x)=(-n)x^{-n-1}$. 従って $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ より $f'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}$.
(e) n が正整数のとき $g(y)=y^n$ とおくと (c) より $g'(y)=ny^{n-1}$. さらに f は g の逆関数なので $y=f(x)$ とおくとき $f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.
(f) $r=\frac{m}{n}$（$m,n\in\mathbb{Z}$，$n\geq 1$）とおく．このとき $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=(x^{\frac{1}{n}})^m$ より f は $g(y)=y^m$ と $h(x)=x^{\frac{1}{n}}$ の合成：$f=g\circ h$. さらに (a)–(d) と (e) より $g'(y)=my^{m-1}$ および $h'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. 従って $y=h(x)$ とおくとき $f'(x)=g'(y)h'(x) = my^{m-1}\times\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = rx^{r-1}$.

問題 2　(a) $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kc_kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)c_{k+1}x^k$.
(b) $f'(x) = f(x)\sum_{k=1}^{n}(x-c_k)^{-1}$.

問題 3　(a) $f'(x)=2ax+b$.
(b) $y=f'(p)(x-p)+f(p)=(2ap+b)x-ap^2+c$.
(c) 接線と曲線が点 $(x,f(x))$ において交わるとする．このとき x は方程式 $(2ap+b)x-ap^2+c=ax^2+bx+c$ を満たすが，この方程式は $(x-p)^2=0$ すなわち $x=p$ と同値．これより接線と曲線の交点は点 $(p,f(p))$ のみである．

問題 4　(a) $n=1$ のとき，$x>0$ ならば $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x}{x}=1$ より $\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$. また $x<0$ ならば $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{0}{x}=0$ より $\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. これより極限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ は存在しないので $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない．
(b) $n\geq 2$ のとき，$x>0$ ならば $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{n-1}$ より $\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+0}x^{n-1}=0$. また $x<0$ ならば $n=1$ のときと同様にして $\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. これより $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ なので $f(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$.

問題 5　(a) 二項定理より $a_n=(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$. ここで $\binom{n}{k}=\frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-\ell)$ より $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}=\frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(1-\frac{\ell}{n})$. 以上より所望の式を得る．
(b) $0\leq\ell<k\leq n$ のとき $1-\frac{\ell}{n}\leq 1-\frac{\ell}{n+1}$ かつ $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(1-\frac{\ell}{n})$ の和の各項は正なので $a_n\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(1-\frac{\ell}{n+1})\leq a_{n+1}$.
(c) $0\leq\ell<k\leq n$ のとき $0<1-\frac{\ell}{n}\leq 1$ なので $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(1-\frac{\ell}{n})\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.
(d) $1\leq k\in\mathbb{Z}$ のとき $\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{2^{k-1}}$ より $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=2$ なので $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\leq 1+2=3$. これより正項級数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ は上に有界なので収束し，その値は上界である 3 以下である．
(e) (c)–(d) より $a_n\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\leq 3$. これより数列 $\{a_n\}$ は単調増加かつ上に有界なので収束し，その値は上界である 3 以下である．また $2.5<a_6=\frac{117649}{46656}\leq a_7\leq a_8\leq\cdots$ よりその値は 2.5 より大きい．