5　指数関数と対数関数（2019-05-16）

問題 1　$a, b > 0$ とする．任意の $m \in \mathbb{Z}$ および $1 \leq n, n' \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つことを示せ．ただし（これらを用いて証明される）有理数べきの指数法則を用いてはならない．
(a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.
(b) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.
(c) $\sqrt[nn']{a} = \sqrt[n]{\sqrt[n']{a}}$.
(d) $a < b$ と $a^n < b^n$ は同値.
(e) $a < b$ と $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ は同値.

問題 2　$a > 0$ とする．任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して $a^{m+n} = a^m a^n$ および $a^{mn} = (a^m)^n$ が成り立つ．（整数べきの指数法則.）これを用いて任意の $r, s \in \mathbb{Q}$ に対して次が成り立つことを示せ.
(a) $a^{r+s} = a^r a^s$.
(b) $a^{rs} = (a^r)^s$.

問題 3　二項係数 $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$（$n, k \in \mathbb{Z},\ n \geq k \geq 0$）を考える．
(a) 次の漸化式が成り立つことを示せ：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (n, k \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ n \geq k \geq 0).$$

ただし $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$ である．
(b) 次の等式が成り立つことを n に関する帰納法で示せ：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

問題 4　任意の $0 < a \neq 1$ に対して，対数関数 $f(x) = \log_a x$（$x > 0$）を指数関数 $g(x) = a^x$ の逆関数として定める．この事実と指数法則を用いて，任意の $0 < a, b \neq 1$ および $x, y > 0$ および z に対して次が成り立つことを示せ.
(a) $\log_a(xy) = (\log_a x)(\log_a b)$.
(b) $\log_a x^z = z \log_a x$.
(c) $\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$.

問題 5　関数 f は開区間 I 上狭義単調増加かつ連続とする．このとき f は逆関数 f^{-1} を持ち $f(I) = \{f(x);\ x \in I\}$ は開区間である．
(a) f^{-1} は $f(I)$ 上狭義単調増加であることを示せ.
(b) f^{-1} は $f(I)$ 上連続であることを示せ.

解答例（第 5 回）

問題 1　(a) $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab$ より $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
(b) $m \geq 1$ のとき $a^m = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m}$ なので (a) より $\sqrt[n]{a^m} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \cdots \times \sqrt[n]{a}}_{m} = (\sqrt[n]{a})^m$. $m = 0$ のとき $\sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1 = 1^m = (\sqrt[n]{1})^m$. $m = -1$ のとき (a) より $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{aa^{-1}} = \sqrt[n]{1} = 1$ なので $\sqrt[n]{a^{-1}} = (\sqrt[n]{a})^{-1}$. $m \leq -2$ のとき既に示したことにより $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{(a^{-1})^{-m}} = (\sqrt[n]{a^{-1}})^{-m} = ((\sqrt[n]{a})^{-1})^{-m} = (\sqrt[n]{a})^m$.
(c) $(\sqrt[n]{\sqrt[n']{a}})^{nn'} = ((\sqrt[n]{\sqrt[n']{a}})^n)^{n'} = (\sqrt[n']{a})^{n'} = a$ より $\sqrt[n]{\sqrt[n']{a}} = \sqrt[nn']{a}$.
(d) $b^n - a^n = C(b-a)$（$C = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} > 0$）より同値.
(e) (d) より $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ と $a = (\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n = b$ は同値.

問題 2　$r = \frac{m}{n}$，$s = \frac{m'}{n'}$（$m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$，$n, n' > 0$）とおくと，整数べきの指数法則と問題 1 より(a) $a^{r+s} = a^{\frac{mn'+m'n}{nn'}} = \sqrt[nn']{a^{mn'+m'n}} = \sqrt[nn']{a^{mn'}a^{m'n}} = \sqrt[nn']{a^{mn'}}\sqrt[nn']{a^{m'n}} = a^{\frac{mn'}{nn'}}a^{\frac{m'n}{nn'}} = a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{m'}{n'}} = a^r a^s$.
(b) $a^{rs} = a^{\frac{mm'}{nn'}} = \sqrt[nn']{a^{mm'}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{a^{mm'}}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{(a^m)^{m'}}} = \sqrt[n']{(\sqrt[n]{a^m})^{m'}} = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{m'}{n'}} = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{m'}{n'}} = (a^r)^s$.

問題 3　(a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ より $k = 0, n$ のときは漸化式は $1 = 1$ になる．$k = 1, \ldots, n-1$ のときは

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right) = \binom{n}{k} \cdot 1 = \binom{n}{k}.$$

(b) $n = 1$ のときは両辺とも $x + y$ になる．$n \geq 2$ のとき $(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1}$ と帰納法の仮定より

$$(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}.$$

ここで最右辺の 1 つ目の和は $k+1$ を k と置き直すと $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k}$.（$\binom{n-1}{-1} = 0$ を用いた.）2 つ目の和は $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}$.（$\binom{n-1}{n} = 0$ を用いた.）従って

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right\}x^k y^{n-k}.$$

最後に (a) を用いれば題意の等式を得る.

問題 4　$a^{\log_a x} = x$ と $\log_a a^x = x$ に注意.
(a) 指数法則より $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x}a^{\log_a y} = xy$. 従って $\log_a(xy) = \log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y$.
(b) 指数法則より $a^{z\log_a x} = (a^{\log_a x})^z = x^z$. 従って $\log_a x^z = \log_a a^{z\log_a x} = z\log_a x$.
(c) 指数法則より $a^{(\log_a b)(\log_b x)} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x$. 従って $\log_a x = \log_a a^{(\log_a b)(\log_b x)} = (\log_a b)(\log_b x)$.

問題 5　(a) 任意の $y, y' \in f(I)$ に対して $y < y'$ とする．このとき $y = f(x)$，$y' = f(x')$ を満たす $x, x' \in I$ は $x < x'$ を満たす.（さもなければ $x > x'$ かつ $f(x) = y < y' = f(x')$ となり f は狭義単調増加という仮定

に矛盾.）従って $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x < x' = f^{-1}(f(x')) = f^{-1}(y)$. これより f^{-1} は狭義単調増加である.

(b) $b \in f(I)$ とする. $b = f(a)$ を満たす $a \in I$ に対して（a の ε 近傍が I に収まるくらい）小さな $\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき $\delta = \min\{b - f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon) - b\}$ とおくと $\delta > 0$. さらに $|y - b| < \delta$ を満たす任意の y に対して, $f(a-\varepsilon) \leq b - \delta < y < b + \delta \leq f(a+\varepsilon)$ と (a) より $a - \varepsilon = f^{-1}(f(a-\varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(a+\varepsilon)) = a + \varepsilon$ すなわち $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| = |f^{-1}(y) - a| < \varepsilon$. ゆえに $\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ が成り立つので f^{-1} は b で連続である.