4　連続関数／三角関数（2019-05-09）

問題 1　次の関数 $f,\ g$ の合成関数 $g \circ f$ を求めよ.

(a)　$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin x$　　(b)　$f(x) = \sin x, \quad g(x) = x^2$

(c)　$f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x + 2$　　(d)　$f(x) = x + 2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

問題 2　次の問いに答えよ．ただし中間値の定理を証明なしで用いてよい.
(a) 閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数 f は不等式 $f(a)f(b) < 0$ を満たすとする．このとき f は開区間 (a, b) のどこかで 0 になることを示せ.
　3 次方程式 $x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$ のただ 1 つの実数解を $x = \alpha$ とおく.
(b) $\alpha \in (-2, -1)$ を示せ.
(c) $\alpha \in (\frac{n}{8}, \frac{n+1}{8})$ を満たす整数 n を求めよ.

問題 3　次の問いに答えよ.
(a) 逆余弦関数 Arccos のグラフの概形を描け．ただし Arccos は，$\cos$ の定義域を閉区間 $[0, \pi]$ に制限したときの逆関数である.
(b) 逆正弦関数 Arcsin のグラフの概形を描け．ただし Arcsin は，$\sin$ の定義域を閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限したときの逆関数である.
(c) 逆正接関数 Arctan のグラフの概形を描け．ただし Arctan は，$\tan$ の定義域を開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に制限したときの逆関数である.
(d) 任意の $x \in [-1, 1]$ に対して $\mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ.

問題 4　関数 f は有界閉区間 $I = [a, b]$ 上連続とする．Weierstrass の定理と中間値の定理を用いて $f(I)$ は有界閉区間であることを示せ.

問題 5　関数 f は有界閉区間 $I = [a, b]$ 上連続とする.
(a) 関数 $|f|$ は I 上連続であることを示せ.
(b) I 上の数列 $\{c_n\}$ は c に収束するとする．このとき $c \in I$ であることを示せ．また数列 $\{f(c_n)\}$ は $f(c)$ に収束することを示せ.
(c) Bolzano–Weierstrass の定理を用いて $f(I) = \{f(x); x \in I\}$ は有界であることを示せ．ただし Weierstrass の定理は（この事実を用いて導かれるため）用いてはならない.
ヒント：$f(I)$ が有界でないと仮定すると，任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $|f(c_n)| > n$ を満たす $c_n \in I$ が存在する．そのような c_n を並べた数列 $\{c_n\}$ に対して Bolzano–Weierstrass の定理を適用することにより矛盾を導け.）

問題 6　数列 $\{a_n\}$ は α に収束するとする．このとき任意の部分列 $\{a_{k(n)}\}$（$k(1) < k(2) < k(3) < \cdots$）は α に収束することを示せ.

解答例（第 4 回）

問題 1　(a) $g \circ f(x) = \sin x^2$．(b) $g \circ f(x) = \sin^2 x$．(c) $g \circ f(x) = \frac{1}{x} + 2$．(d) $g \circ f(x) = \frac{1}{x+2}$．

問題 2　(a) 仮定より $f(a)$ と $f(b)$ は一方が正，他方が負である．特に 0 は $f(a)$ と $f(b)$ の間にあるので，中間値の定理より $f(c) = 0$ となる $c \in [a, b]$ が存在する．仮定より $f(a)$ と $f(b)$ は 0 でないから，そのような c は（$[a, b]$ から a と b を除いた）開区間 (a, b) の中にある．
(b) $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ に関して $f(-2) = -1$，$f(-1) = 2$ より $f(-2)f(-1) < 0$．従って (a) より f は $(-2, -1)$ のどこかの点で 0 になり，これが α に他ならない．
(c) 区間 $(-2, -1)$ の中点で $f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{8}$．従って $f(-2)f(-\frac{3}{2}) < 0$ より $\alpha \in (-2, -\frac{3}{2})$．この区間の中点で $f(-\frac{7}{4}) = \frac{17}{64}$．従って $f(-2)f(-\frac{7}{4}) < 0$ より $\alpha \in (-2, -\frac{7}{4})$．この区間の中点で $f(-\frac{15}{8}) = -\frac{159}{512}$．従って $f(-\frac{15}{8})f(-\frac{7}{4}) < 0$ より $\alpha \in (-\frac{15}{8}, -\frac{7}{4})$．ゆえに $n = -15$．

問題 3　(a) (b) (c) 略．(d) $y = \mathrm{Arccos}\, x$ とおく．このとき $x = \cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$．さらに $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ から $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\mathrm{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2} - y$．以上より y を消去すると $\mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$．

問題 4　Weierstrass の定理より次を満たす $c, d \in I$ が存在する：任意の $x \in I$ に対して $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$．これより $f(I) \subset [f(c), f(d)]$．有界閉区間 J を

$$J := \begin{cases} [c, d] & (c \leq d); \\ [d, c] & (c > d) \end{cases}$$

により定める．このとき I は区間なので $J \subset I$．さらに任意の $y \in [f(c), f(d)]$ に対して $y \in f(I)$．実際，中間値の定理より $f(x) = y$ を満たす $x \in J$ が存在するが，$J \subset I$ よりこの x は I に属する．ゆえに $[f(c), f(d)] \subset f(I)$．以上より $f(I)$ は有界閉区間 $[f(c), f(d)]$ に等しい．

問題 5　(a) 任意の $x, c \in I$ に対して $||f(x)| - |f(c)|| \leq |f(x) - f(c)|$ なので f が I 上連続ならば $|f|$ も I 上連続．（x, y が同符号のとき $||x| - |y|| = |x - y|$，異符号のとき $||x| - |y|| = |x + y| \leq |x - y|$.）
(b) 仮定より任意の n に対して $a \leq c_n \leq b$．今 $c < a$ とすると仮定より次を満たす N が存在する：任意の $n > N$ に対して $|c_n - c| < a - c$．特に任意の $n > N$ に対して $c_n < c + (a - c) = a$ となり矛盾．$c > b$ としても同様の矛盾を導けるので $a \leq c \leq b$ でなければならない．

$\varepsilon > 0$ とする．今 f は $c \in I$ で連続なので次を満たす $\delta > 0$ が存在する：$|x - c| < \delta$（かつ $x \in I$）ならば $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$．また $\{c_n\}$ は c に収束するので，この δ に対して次を満たす N が存在する：$n > N$ ならば $|c_n - c| < \delta$．ゆえに $n > N$ ならば $|f(c_n) - f(c)| < \varepsilon$ が成り立つ．以上より $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ である．
(c) $f(I)$ は有界でないとする．このとき任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $|f(c_n)| > n$ を満たす $c_n \in I$ が存在する．そのような c_n を並べた数列 $\{c_n\}$ は（有界な I 上の数列より）有界なので，Bolzano–Weierstrass の定理より収束する部分列 $\{c_{k(n)}\}$ を含む．そこで $c = \lim_{n\to\infty} c_{k(n)}$ とおくと (b) より $c \in I$．さらに (a) より $|f|$ は I 上連続なので $\lim_{n\to\infty} |f(c_{k(n)})| = |f(c)| < \infty$．しかし c_n のとり方から $|f(c_{k(n)})| > k(n) \geq n$ より $\lim_{n\to\infty} |f(c_{k(n)})| = \infty$ となるので矛盾．

問題 6　$\varepsilon > 0$ とする．仮定より次を満たす $N = N(\varepsilon)$ が存在する：任意の $n > N$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$．今（数列の添字を $n = 1, 2, 3, \ldots$ とすると）任意の n に対して $k(n) \geq n$ が成り立つ．従って $n > N$ ならば