## 3　連続関数（2019-04-25）

**問題 1**　次の関数の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n \quad (n\in\mathbb{Z})$　(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n \quad (n\in\mathbb{Z})$

**問題 2**　$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)=\max\{x,0\}$ を考える．
(a) $f$ のグラフの概形を描け．
(b) $f$ は $0$ で連続であることを示せ．

**問題 3**　$m,n$ を非負整数とする．$m$ 次多項式 $p(x)=\sum_{k=0}^{m}p_kx^k$（$p_k\in\mathbb{R}$，$p_m\neq 0$）と $n$ 次多項式 $q(x)=\sum_{k=0}^{n}q_kx^k$（$q_k\in\mathbb{R}$，$q_n\neq 0$）から有理関数 $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ をつくる．次のそれぞれの場合に対して極限 $\lim_{x\to\infty}r(x)$ を求めよ．

(a)　$m>n$　(b)　$m<n$　(c)　$m=n$

**問題 4**　関数 $f(x)$ は $\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)$ を満たすとき $a$ で**右側連続**であるという．次の命題を示せ：関数 $f(x)$ は $a$ で右側連続かつ $f(a)>\alpha$ とする．このとき任意の $x\in(a,a+\delta)$ に対して $f(x)>\alpha$ が成り立つような $\delta>0$ が存在する．

**問題 5**　区間 $(c,\infty)$ 上の関数 $f$ と数列 $\{x_n\}$ を考える．（$c\in\mathbb{R}$.）$\{x_n\}$ は $\infty$ に発散するとする．数列 $\{y_n\}$ を $y_n=f(x_n)$ により定める．
(a) 次の命題を示せ：$\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$ ならば $\{y_n\}$ は $\alpha$ に収束する．
(b) 次の命題は成り立つとは限らないことを示せ：$\{y_n\}$ が $\alpha$ に収束するならば $\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$ が成り立つ．

**問題 6**　開区間 $I$ 上の関数 $f$ と数列 $\{x_n\}$ を考える．$\{x_n\}$ は $a\in I$ に収束するとする．数列 $\{y_n\}$ を $y_n=f(x_n)$ により定める．
(a) 次の命題を示せ：$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ ならば $\{y_n\}$ は $\alpha$ に収束する．
(b) 次の命題は成り立つとは限らないことを示せ：$\{y_n\}$ が $\alpha$ に収束するならば $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ が成り立つ．

## 解答例（第 3 回）

**問題 1**　(a) $\infty$．(b) $-\infty$．(c) $1$．(d) $n>0$ のときは $\infty$，$n=0$ のときは $1$，$n<0$ のときは $0$．(e) $\lim_{x\to-\infty}x^n=\lim_{x\to\infty}(-x)^n=(-1)^n\lim_{x\to\infty}x^n$ より $n>0$ かつ $n$ が偶数のときは $\infty$，$n>0$ かつ $n$ が奇数のときは $-\infty$，$n=0$ のときは $1$，$n<0$ のときは $0$．

**問題 2**　(a) 略．(b) $\varepsilon>0$ とするとき，任意の $0<x<\varepsilon$ に対して $|f(x)-f(0)|=|x-0|=x<\varepsilon$．従って $\lim_{x\to0+0}f(x)=f(0)$．また任意の $x<0$ に対して $|f(x)-f(0)|=|0-0|=0<\varepsilon$．従って $\lim_{x\to0-0}f(x)=f(0)$．ゆえに $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ が成り立つ．

**問題 3**　$r(x)=x^{m-n}\cdot\frac{p_m+\sum_{k=0}^{m-1}p_kx^{k-m}}{q_n+\sum_{\ell=0}^{n-1}q_kx^{\ell-n}}$ かつ $\lim_{x\to\infty}x^{k-m}=0=\lim_{x\to\infty}x^{\ell-n}$（$k<m$，$\ell<n$）より

$$\lim_{x\to\infty}r(x)=\frac{p_m}{q_n}\lim_{x\to\infty}x^{m-n}=\begin{cases}\infty & (m>n\text{ かつ }q_m\text{ と }p_n\text{ は同符号}),\\ -\infty & (m>n\text{ かつ }q_m\text{ と }p_n\text{ は異符号}),\\ 0 & (m<n),\\ \frac{p_n}{q_n} & (m=n).\end{cases}$$

**問題 4**　$f$ は $a$ で右側連続かつ $f(a)>\alpha$ より次を満たす $\delta>0$ が存在する：任意の $a<x<a+\delta$ に対して $|f(x)-f(a)|<\frac{f(a)-\alpha}{2}$．特に $a<x<a+\delta$ ならば $f(x)>f(a)-\frac{f(a)-\alpha}{2}=\frac{f(a)+\alpha}{2}>\frac{\alpha+\alpha}{2}=\alpha$．

**問題 5**　(a) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$ とする．また $\varepsilon>0$ とする．このとき次を満たす $R$ が存在する：$x>R$ ならば $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$．さらにこの $R$ に対して仮定より次を満たす $N$ が存在する：$n>N$ ならば $x_n>R$．従ってこの $N$ に対して $n>N$ ならば $|y_n-\alpha|=|f(x_n)-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ．
(b) 関数 $f(x)=\sin x$ と $\infty$ に発散する数列 $\{x_n=n\pi\}$ を考える．このとき任意の $n$ に対して $y_n=f(x_n)=\sin n\pi=0$ より数列 $\{y_n\}$ は $0$ に収束する．しかし次を満たす $R$ は存在しない：$x>R$ ならば $|f(x)-0|<\frac{1}{2}$．実際，任意の $R$ に対して，$x=(m+\frac{1}{2})\pi>R$（$m\in\mathbb{Z}$）を満たす $x$ をとれば $|f(x)|=1$ より $|f(x)-0|=1\geq\frac{1}{2}$．従って関数の極限として $\lim_{x\to0}f(x)=0$ は成り立たない．

**問題 6**　(a) $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ とする．また $\varepsilon>0$ とする．このとき次を満たす $\delta>0$ が存在する：$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$．さらにこの $\delta$ に対して仮定より次を満たす $N$ が存在する：$n>N$ ならば $|x_n-a|<\delta$．従ってこの $N$ に対して $n>N$ ならば $|y_n-\alpha|=|f(x_n)-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ．
(b) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f$ を次のように定める：

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\in\mathbb{Q}),\\ 1 & (x\notin\mathbb{Q}).\end{cases}$$

また $0$ に収束する数列 $\{x_n\}$ を $x_n=\frac{1}{n}$（$n=1,2,3,\dots$）により定める．このとき任意の $n$ に対して $x_n\in\mathbb{Q}$ より $y_n=f(x_n)=0$．特に数列 $\{y_n\}$ は $0$ に収束する．しかし次を満たす $\delta>0$ は存在しない：$|x-0|=|x|<\delta$ ならば $|f(x)-0|<\frac{1}{2}$．実際，任意の $\delta>0$ に対して，$|x|<\delta$ を満たす無理数 $x$ をとれば $f(x)=1$ より $|f(x)-0|=1\geq\frac{1}{2}$．従って関数の極限として $\lim_{x\to0}f(x)=0$ は成り立たない．