2　級数（2019-04-18）

問題 1　次の級数は収束するか否か示せ．収束する場合はその和を求めよ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k \quad (|r|<1)$　　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$　　(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k-c^k}{b^k} \quad (|a|<|b|>|c|)$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$　　(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \left(a_{2k-1}=\frac{k}{k+1},\ a_{2k}=-\frac{k}{k+1}\right)$

問題 2　級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$ は収束することを示せ．

問題 3　$|r|<1$ とする．

(a) 数列 $a_k=kr^k$（$k=1,2,3,\ldots$）は 0 に収束することを示せ．

(b) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k$ の和を求めよ．

問題 4　級数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ と $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ はともに絶対収束するとする．このとき級数 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ は絶対収束することを示せ．

問題 5　次の問いに答えよ．

(a) 数列 $\{a_k\}$ に対して次を満たす定数 $0<p<1$ が存在するとする：任意の $k\geq 0$ に対して $|\frac{a_{k+1}}{a_k}|\leq p$．このとき級数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ は絶対収束することを示せ．

(b) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して級数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ は絶対収束することを示せ．

問題 6　調和級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ を考える．

(a) 整数 $n\geq 1$ に対して $2^p\leq n$ を満たす最大の整数 p を $p(n)$ とおく．このとき $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\frac{p(n)}{2}+1$ が成り立つことを示せ．

(b) 調和級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ は ∞ に発散することを示せ．

解答例（第 2 回）

問題 1 (a) $\frac{1}{1-r}$ に収束する．

(b) 数列 $\{(-1)^n\}$ は 0 に収束しないので，級数は収束しない．

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{a}{b})^k$ は $\frac{1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{b}{b-a}$ に収束する．また $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{c}{b})^k$ は $\frac{1}{1-\frac{c}{b}} = \frac{b}{b-c}$ に収束する．従って問題の級数は $\frac{b}{b-a} - \frac{b}{b-c} = \frac{b(a-c)}{(b-a)(b-c)}$ に収束する．

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$．従って級数は 1 に収束する．

(e) 数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないので，級数は収束しない．

問題 2 任意の $k \geq 2$ に対して不等式 $0 \leq \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ が成り立つ．問題 1 (d) より級数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ は収束するので，優級数の法則より級数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ も収束する．ゆえに級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ は収束する．

問題 3 (a) $\frac{1}{|r|} = 1+\delta$ $(\delta > 0)$ とおくとき $\frac{1}{|r|^k} = (1+\delta)^k > \frac{k(k-1)}{2}\delta^2$ $(k \geq 1)$ より $|a_k| = |kr^k| = \frac{k}{(1+\delta)^k} < \frac{2}{(k-1)\delta^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0$．これより数列 $\{|a_k|\}$ は 0 に収束するので $\{a_k\}$ も 0 に収束する．

(b) $\sum_{k=0}^{n} (k+1)r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k \sum_{\ell=0}^{n-k} r^\ell = \frac{1}{1-r} \sum_{k=0}^{n} r^k(1-r^{n-k+1}) = \frac{1}{1-r} \sum_{k=0}^{n} (r^k - r^{n+1}) = \frac{1}{1-r}\left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r} - (n+1)r^{n+1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{(1-r)^2}$．（最後の極限で (a) を用いた．）従って級数の和は $\frac{1}{(1-r)^2}$．

問題 4 仮定より級数 $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ は（$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ に）収束する．さらに任意の n に対して $0 \leq |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ が成り立つ．従って優級数の法則より級数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|$ は収束する．

問題 5 (a) 仮定より任意の k に対して $0 \leq |a_k| \leq |a_0|p^k$ が成り立つ．さらに $|p| < 1$ より級数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_0|p^k$ は（$\frac{|a_0|}{1-p}$ に）収束する．従って優級数の法則より級数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ は収束する．

(b) $a_k = \frac{x^k}{k!}$ とおくとき $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \frac{|x|}{k+1}$．特に N を $|x|$ 以上の整数とすると，任意の $k \geq N$ に対して $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq \frac{|x|}{N+1} < 1$．これと (a) より級数 $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ は収束するので，級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$ も収束する．

問題 6 (a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^{p(n)}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{\ell=1}^{p(n)} \sum_{2^{\ell-1}<k\leq 2^\ell} \frac{1}{k} =: X$．ここで $2^{\ell-1} < k \leq 2^\ell$ のとき $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^\ell}$ なので $\sum_{2^{\ell-1}<k\leq 2^\ell} \frac{1}{k} \geq \sum_{2^{\ell-1}<k\leq 2^\ell} \frac{1}{2^\ell} = \frac{2^{\ell-1}}{2^\ell} = \frac{1}{2}$．従って $X \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{p(n)} \frac{1}{2} = 1 + \frac{p(n)}{2}$．

(b) $\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$ より $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{p(n)}{2} + 1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$．従って $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$．