1　数列の極限 (2019-04-11)

問題 1　数列 $\{a_n\}$ に対して次の 2 命題が同値であることを示せ.

(i) $\{a_n\}$ は 0 に収束する.
(ii) $\{|a_n|\}$ は 0 に収束する.

問題 2　数列 $\{a_n\}$ は 0 を含まないとする.
(a) $\{a_n\}$ が ∞ に発散するならば数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ は 0 に収束することを示せ.
(b) 次の命題の真偽を論じよ：$\{a_n\}$ が 0 に収束するならば数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ は ∞ に発散する.

問題 3　等比数列 $a_n = \beta^n$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）を考える.
(a) $\beta > 1$ のとき $\{a_n\}$ は ∞ に発散することを示せ.
(b) $-1 < \beta < 1$ のとき $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示せ.

問題 4　数列 $a_n = n!$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）は ∞ に発散することを示せ.

問題 5　数列 $a_n = \frac{x^n}{n!}$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）を考える.
(a) N を $|x|$ より大きい整数とする．任意の整数 $n > N$ に対して不等式

$$|a_n| \leq |a_N| \left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N}$$

が成り立つことを示せ.
(b) $\{a_n\}$ が 0 に収束することを示せ.

問題 6　数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ α, β に収束するとする.
(a) 数列 $\{a_n + b_n\}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを示せ.
(b) 数列 $\{a_n b_n\}$ は $\alpha\beta$ に収束することを示せ.

問題 7　数列 $\{a_n\}$ はすべての項が正でありかつ $\alpha > 0$ に収束するとする.
(a) 任意の n に対して $a_n \geq A$ を満たすような $A > 0$ が存在することを示せ.
(b) 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ は $\frac{1}{\alpha}$ に収束することを示せ.

解答例（第 1 回）

問題 1　$|a_n - 0| = |a_n| = ||a_n|| = ||a_n| - 0|$ より $|a_n - 0| < \varepsilon$ と $||a_n| - 0| < \varepsilon$ は同値である．従って命題 (i),(ii) は同値である．

問題 2　(a) $\{a_n\}$ は ∞ に発散するとする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して次を満たす N が存在する：任意の $n > N$ に対して $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ (> 0)．この N に関して $n > N$ ならば $|\frac{1}{a_n} - 0| = |\frac{1}{a_n}| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ が成り立つ．
(b) この命題は偽である．実際，数列 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$（$n = 1, 2, 3, \ldots$）は 0 に収束するが，数列 $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ は ∞ に発散しない．

問題 3　(a) $\beta = 1 + \delta$（$\delta > 0$）とおく．このとき任意の整数 $n \geq 0$ に対して $\beta^n = (1+\delta)^n > n\delta$ が成り立つ．また $n\delta \xrightarrow{n\to\infty} \infty$．これより $\beta^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ が成り立つ．
(b) $\beta = 0$ のときは $a_n \equiv 0$（定数列）なので明らか．$0 < |\beta| < 1$ のときは $\frac{1}{|\beta|} > 1$ と (a) より $\frac{1}{|\beta^n|} = (\frac{1}{|\beta|})^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$．従って**問題 2** (a) より数列 $|a_n| = |\beta^n|$ は 0 に収束する．さらに**問題 1** より $\{a_n\}$ も 0 に収束する．

問題 4　任意の正整数 n に対して $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \geq 2^{n-1}$．また**問題 3** (a) より $2^{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$．従って $n! \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ が成り立つ．

問題 5　(a) $n > N$ のとき $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \geq 1 \times 2 \times \cdots \times N \times \underbrace{N \times \cdots N}_{n-N\ 個} = N!N^{n-N}$ より $|a_n| = \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{N!N^{n-N}} = \frac{|x|^N}{N!} \cdot \frac{|x|^{n-N}}{N^{n-N}} = |a_N|(\frac{|x|}{N})^{n-N}$．
(b) $0 \leq \frac{|x|}{N} < 1$ と**問題 3** (b) より $|a_N|(\frac{|x|}{N})^{n-N} \xrightarrow{n\to\infty} 0$．従って $0 \leq |a_n| \leq |a_N|(\frac{|x|}{N})^{n-N}$ とはさみうちの原理より $\{|a_n|\}$ は 0 に収束する．さらに**問題 1** より $\{a_n\}$ も 0 に収束する．

問題 6　$\varepsilon > 0$ を任意にとる．仮定より次を満たす N が存在する：任意の $n > N$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$．同様に次を満たす M が存在する：任意の $n > N'$ に対して $|b_n - \beta| < \varepsilon$．
(a) 任意の $n > \max\{N, N'\}$ に対して $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$．ゆえに $\{a_n + b_n\}$ は $\alpha + \beta$ に収束する．
(b) 数列 $\{b_n\}$ は有界なので次を満たす（ε に依らない）定数 $B > 0$ が存在する：任意の n に対して $|b_n| < B$．従って任意の $n > \max\{N, N'\}$ に対して $|a_n b_n - \alpha\beta| = |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta| < \varepsilon B + |\alpha|\varepsilon = (|\alpha| + B)\varepsilon$．ゆえに（$|\alpha| + B$ は ε に依らないので）$\{a_n b_n\}$ は $\alpha\beta$ に収束する．

問題 7　(a) 仮定より次を満たす N が存在する：任意の $n > N$ に対して $|a_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2}$．特に $a_n > \frac{\alpha}{2}$ $(n > N)$ より任意の n に対して $a_n \geq \min\{a_1, \ldots, a_N, \frac{\alpha}{2}\} > 0$ が成り立つ．
(b) $\varepsilon > 0$ を任意にとる．このとき仮定より次を満たす N が存在する：任意の $n > N$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$．また (a) の A は任意の n に対して $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{A}$ を満たす．従って $n > N$ ならば $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| = \frac{|a_n - \alpha|}{a_n \alpha} < \frac{\varepsilon}{A\alpha}$ が成り立つ．これより（$A\alpha$ は ε に依らないので）$\{\frac{1}{a_n}\}$ は $\frac{1}{\alpha}$ に収束する．