解析学 II-1：期末試験（2020-01-23）

学籍番号 ______________________　　氏名 ______________________

問題 1　次の積分を累次積分に直して求めよ．

(a) $\displaystyle\int_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} (1+x+y+xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　　(b) $\displaystyle\int_{\substack{0\le x\le \pi\\ -\frac{\pi}{2}\le y\le 0}} \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

問題 2　次の積分を累次積分に直して求めよ．

(a) $\displaystyle\int_{0\le x\le y\le 2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(b) $\displaystyle\int_{\substack{0\le x\le 1\\ \sqrt{x}\le y\le 1}} \exp(y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

問題 3　次の問いに答えよ．

(a) 次の積分を変数変換 $s = x + y,\ t = x - y$ を用いて求めよ．

$$\int_{\substack{0 \le x+y \le 1 \\ 0 \le x-y \le 1}} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(b) 次の積分を極座標に変換して求めよ．

$$\int_{\substack{y \ge 0 \\ x^2+y^2 \le a^2}} (x^4 + x^2y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (a \ge 0)$$

問題 4　集合 $A = (0,1]^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\}$ および A 上の関数 $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$ を考える．

(a) f は A 上有界でないことを示せ．

(b) A の近似列 $\{K_k\}_{k=1,2,3,\ldots}$ をひとつ挙げよ．ただし各 K_k 上 f は有界であること．

(c) 積分 $I_k = \int_{K_k} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を求めよ．

(d) 広義積分 $I = \int_A f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\substack{0<x\leq 1\\ 0<y\leq 1}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y}}$ を求めよ．

問題 5　広義積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ を考える．

(a) $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を示せ．

(b) I を求めよ．

解答例（解析学 II-1：期末試験）

問題 1　求める積分を I とおく．
(a) $I=\int_0^1(\int_0^1(1+x+y+xy)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$．累次積分を計算する：(i) $\int_0^1(1+x+y+xy)\,\mathrm{d}y=[(1+x)y+\frac{(1+x)y^2}{2}]_{y=0}^{y=1}=\frac{3(1+x)}{2}$．(ii) $\int_0^1\frac{3(1+x)}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}[x+\frac{x^2}{2}]_{x=0}^{x=1}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$．これより $I=\frac{9}{4}$．
(b) $I=\int_0^\pi(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sin(x+y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$．累次積分を計算する：(i) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sin(x+y)\,\mathrm{d}y=[-\cos(x+y)]_{y=-\frac{\pi}{2}}^{y=0}=-\cos x+\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x-\cos x$．(ii) $\int_0^\pi(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=[-\cos x-\sin x]_{x=0}^{x=\pi}=2$．これより $I=2$．

問題 2　求める積分を I とおく．
(a) $I=\int_{\substack{0\le y\le 2\\0\le x\le y}}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2(\int_0^y xy\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$．累次積分を計算する：(i) $\int_0^y xy\,\mathrm{d}x=[\frac{x^2y}{2}]_{x=0}^{x=y}=\frac{y^3}{2}$．(ii) $\int_0^2\frac{y^3}{2}\,\mathrm{d}y=[\frac{y^4}{8}]_{y=0}^{y=2}=2$．これより $I=2$．
(b) $I=\int_{\substack{0\le y\le 1\\0\le x\le y^2}}\exp(y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1(\int_0^{y^2}\exp(y^3)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$．累次積分を計算する：(i) $\int_0^{y^2}\exp(y^3)\,\mathrm{d}x=y^2\exp(y^3)$．(ii) $\int_0^1 y^2\exp(y^3)\,\mathrm{d}y=[\frac{\exp(y^3)}{3}]_{y=0}^{y=1}=\frac{\mathrm{e}-1}{3}$．これより $I=\frac{\mathrm{e}-1}{3}$

問題 3　求める積分を I，その積分範囲を A とおく．
(a) $s=x+y$，$t=x-y$ とおくとき関数 $\Psi:(x,y)\mapsto(s,t)$ は $\binom{s}{t}=\Psi(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\binom{x}{y}$ により与えられる．Ψ は $\mathbb{R}^2$ 上可逆であり逆関数 $\Phi=\Psi^{-1}$ は $\binom{x}{y}=\Phi(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\binom{s}{t}$．区間 $B=[0,1]^2$ に関して $\Phi(B)=A$ かつ Φ は B を含む $\mathbb{R}^2$ 上（可逆なので）単射．またヤコビ行列 $\Phi'=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s}&\frac{\partial x}{\partial t}\\\frac{\partial y}{\partial s}&\frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}$ の行列式 $\det\Phi'=\det\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\{\det\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\}^{-1}=-\frac{1}{2}$ は B 上非零．従って $I=\int_A x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_B x\times|\det\Phi'|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_{\substack{0\le s\le 1\\0\le t\le 1}}\frac{s+t}{2}\times\frac{1}{2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_{\substack{0\le s\le 1\\0\le t\le 1}}\frac{s}{4}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\int_{\substack{0\le s\le 1\\0\le t\le 1}}\frac{t}{4}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=2\int_{\substack{0\le s\le 1\\0\le t\le 1}}\frac{s}{4}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_{\substack{0\le s\le 1\\0\le t\le 1}}\frac{s}{2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_0^1(\int_0^1\frac{s}{2}\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}s=\int_0^1\frac{s}{2}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{4}$．
(b) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおくとき関数 $\Phi:(r,\theta)\mapsto(x,y)$ は次を満たす：集合 $B=[0,a]\times[0,\pi]$，$N=\{(r,\theta)\in B;\ r=0\}=\{(0,\theta)\in\mathbb{R}^2;\ \theta\in[0,\pi]\}$ および $M=\Phi(N)=\{(0,0)\}$ に関して $\Phi(B\setminus N)=A\setminus M$ かつ Φ は $B\setminus N$ 上単射．またヤコビ行列 $\Phi'=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}$ の行列式 $\det\Phi'=r$ は $B\setminus N$ 上非零．しかも $\mu(M)=\mu(N)=0$．従って $I=\int_A(x^4+x^2y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{A\setminus M}(x^4+x^2y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{B\setminus N}(x^4+x^2y^2)\times|\det\Phi'|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_B(x^4+x^2y^2)\times|\det\Phi'|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_{\substack{0\le r\le a\\0\le\theta\le\pi}}r^5\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^a(\int_0^\pi r^5\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}r=(\int_0^a r^5\,\mathrm{d}r)(\int_0^\pi\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta)=(\int_0^a r^5\,\mathrm{d}r)(\int_0^\pi\frac{1+\cos 2\theta}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta)=\frac{a^6}{6}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^6}{12}$．

問題 4　(a) A 上の点列 $(x_k,y_k)=(\frac{1}{k},\frac{1}{k})$ $(k=1,2,3,\dots)$ に関して $\lim_{k\to\infty}f(x_k,y_k)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{k}{2}}=\infty$．これより f は A 上有界でない．
(b) 例えば $K_k=[\frac{1}{k},1]^2$．
(c) $I_k=\int_{[\frac{1}{k},1]^2}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y}}=\int_{\frac{1}{k}}^1(\int_{\frac{1}{k}}^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y}})\,\mathrm{d}x$．累次積分を計算する：(i) $\int_{\frac{1}{k}}^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y}}=[2\sqrt{x+y}]_{y=\frac{1}{k}}^{y=1}=2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+\frac{1}{k}})$．(ii) $\int_{\frac{1}{k}}^1 2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+\frac{1}{k}})\,\mathrm{d}x=[\frac{4}{3}\{(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+\frac{1}{k})^{\frac{3}{2}}]_{x=\frac{1}{k}}^{x=1}=\frac{4}{3}\{2\sqrt{2}-2(1+\frac{1}{k})^{\frac{3}{2}}+(\frac{2}{k})^{\frac{3}{2}}\}$．これより $I_k=\frac{4}{3}\{2\sqrt{2}-2(1+\frac{1}{k})^{\frac{3}{2}}+(\frac{2}{k})^{\frac{3}{2}}\}$．
(d) （区間 A は可測で f は A 上連続かつ非負なので）$I=\lim_{k\to\infty}I_k=\frac{8(\sqrt{2}-1)}{3}$．

問題 5　$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ および $g(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}=f(x)f(y)$ とおく．
(a) 広義積分 I の積分範囲 $\mathbb{R}$ の近似列として区間 $A_k=[-k,k]$（$k=1,2,3,\dots$）をとり積分 $I_k=\int_{A_k}f\,\mathrm{d}x$

を考える．このとき（f は $\mathbb{R}$ 上連続かつ非負なので）$I = \lim_{k\to\infty} I_k$．広義積分 $J = \int_{\mathbb{R}^2} g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ の積分範囲 $\mathbb{R}^2$ の近似列として区間 $B_k = A_k^2 = [-k,k]^2$（$k = 1,2,3,\dots$）をとり積分 $J_k = \int_{B_k} g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を考える．このとき（g は $\mathbb{R}^2$ 上連続かつ非負なので）$J = \lim_{k\to\infty} J_k$．また $J_k = \int_{A_k^2} f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (\int_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}x)(\int_{A_k} f(y)\,\mathrm{d}y) = I_k^2$．以上より $J = \lim_{k\to\infty} J_k = \lim_{k\to\infty} I_k^2 = I^2$．

(b) 広義積分 J の積分範囲 $\mathbb{R}^2$ の近似列として円盤 $A'_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le k^2\}$ ($k = 1,2,3,\dots$) をとり積分 $J'_k = \int_{A'_k} g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x^2+y^2\le k^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を考える．$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて極座標に変換すると $J'_k = \int_{\substack{0\le r\le k\\0\le\theta\le 2\pi}} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = (\int_0^k r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r)(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\theta) = 2\pi[-\frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{2}]_{r=0}^{r=k} = 2\pi\times\frac{1-\mathrm{e}^{-k^2}}{2} = \pi(1-\mathrm{e}^{-k^2})$．これより（$g$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続かつ非負なので）$J = \lim_{k\to\infty} J'_k = \pi$．従って (a) より $I^2 = J = \pi$．今 f は $\mathbb{R}$ 上非負なので $I \ge 0$．ゆえに $I = \sqrt{\pi}$．